

Afina in projektivna geometrija

2. izpit

21. 8. 2019

1. naloga (20 točk)

- (a) Naj bo $\tau_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zrcaljenje čez premico $y = x + 1$, $\tau_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pa rotacija okoli točke $(2, 3)$ za 90° v pozitivni smeri. Opiši geometrijski pomen izometrij $\tau_1 \circ \tau_2$ in $\tau_2 \circ \tau_1$.
- (b) Naj bosta p_1 in p_2 premici v $\mathbb{R}^3$, ki potekata skozi koordinatno izhodišče in naj bosta R_1 in R_2 rotaciji okoli teh premic za kota $\phi_1, \phi_2 \in (0, \pi)$. Pokaži, da rotaciji R_1 in R_2 komutirata natanko takrat, ko je $p_1 = p_2$.

2. naloga (20 točk)

V afini ravnini $\mathbb{R}^2$ sta dani premici $p_1 : y = -2$ in $p_2 : x = 2$ ter krožnici $K_1 : x^2 + y^2 = 1$ in $K_2 : (x + 2)^2 + y^2 = 4$.

- (a) Izračunaj predpis kakšne afine transformacije $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki preslika premico p_1 na premico p_2 in krožnico K_1 na krožnico K_2 .
- (b) Utemelji, ali je afina transformacija, ki zadošča pogojem iz (a) dela, enolično določena.

3. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{Z}_3^3)$ je dana premica $p = \{[x : y : z] \mid y = 0\}$. Naj bo H množica vseh projektivnosti $\theta : P(\mathbb{Z}_3^3) \rightarrow P(\mathbb{Z}_3^3)$, za katere je $\theta(T) = T$ za vsako točko $T \in p$.

- (a) Pokaži, da je množica H grupa in izračunaj njeno moč.
- (b) Ali je grupa H komutativna?

4. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dane točke $T_1 = [0 : 0 : 1]$, $T_2 = [0 : 1 : 1]$, $T_3 = [-1 : 1 : 1]$ in $T_4 = [-2 : 0 : 1]$.

- (a) Izračunaj enačbe vseh izrojenih stožnic v $P(\mathbb{R}^3)$, ki vsebujejo dane štiri točke. Nato skiciraj njihove zožitve na afino ravnino $z = 1$.
- (b) Izračunaj enačbo neizrojene stožnice $\mathcal{S}$, ki vsebuje dane štiri točke in točko $T_5 = [1 : 2 : 1]$. Nato izračunaj enačbo tangente na stožnico $\mathcal{S}$ v točki T_5 .