

Afina in projektivna geometrija

1. izpit

17. 6. 2020

1. naloga (25 točk)

- (a) V evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ je dan trikotnik ABC z oglišči $A(1, 0)$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ in $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Geometrično opiši izometrijo

$$\tau = \tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{CA},$$

kjer so τ_{AB} , τ_{BC} in τ_{CA} zrcaljenja preko nosilk stranic trikotnika.

- (b) Naj bo $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometrija, ki ima končno mnogo fiksnih točk. Pokaži, da ima potem τ bodisi eno fiksno točko, ali pa sploh nima fiksnih točk.

2. naloga (25 točk)

V afini ravnini $\mathbb{R}^2$ je dan pravokotnik z oglišči $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ in $D(0, 1)$. Označimo z G množico vseh afinih transformacij $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki preslikajo pravokotnik $ABCD$ nazaj nase.

- (a) Izračunaj predpise vseh afinih transformacij $\tau \in G$, za katere je $\tau(A) = C$.
- (b) Pokaži, da je G grupa in ugotovi, kateri znani grupi je izomorfn.

3. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{Z}_7^3)$ sta dani premici:

$$p = \{[x : y : z] \mid x = 0\},$$
$$q = \{[x : y : z] \mid y = 0\}.$$

- (a) Projektivnost $\theta : p \rightarrow q$ je določena s pogoji:

$$\begin{aligned}\theta([0 : 3 : 1]) &= [1 : 0 : 0], \\ \theta([0 : 4 : 1]) &= [2 : 0 : 1], \\ \theta([0 : 5 : 1]) &= [3 : 0 : 1].\end{aligned}$$

Pokaži, da je θ perspektivnost in poišči njen center.

- (b) Ugotovi, koliko je različnih perspektivnosti oziroma projektivnosti s p na q .

4. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid x^2 + 2xy + y^2 - \sqrt{2}xz + \sqrt{2}yz = 0\}.$$

- (a) Poišči pol premice $p = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$ in polarno točko $T = [0 : 0 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$.
- (b) Skiciraj zožitev stožnice $\mathcal{S}$ na afini del projektivne ravnine, ki ustreza $z = 1$.