

Afina in projektivna geometrija

2. izpit

19. 8. 2020

1. naloga (25 točk)

- (a) V evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ je dana premica p in točka $T \in p$. Naj bo $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotacija za 90° okoli točke T in $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zrcaljenje čez premico p . Geometrično opiši izometriji $R \circ Z$ in $Z \circ R$.
- (b) Naj bo $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometrija s predpisom $\tau(x, y, z) = (-y + 1, x - 1, z + 1)$. Utemelji, ali obstaja $n \in \mathbb{N}$, da velja $\tau^n = \text{id}$.

2. naloga (25 točk)

V afinem prostoru $\mathbb{R}^3$ je dan trikotnik ABC z oglišči $A(2, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$ in $C(0, 1, 2)$ ter premica p s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (1 + t, -1 + 2t, -1 + t)$.

- (a) Ugotovi, ali premica p seka trikotnik ABC .
- (b) Naj bo π ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki jo določa trikotnik ABC . Ali obstaja afina transformacija $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero sta $\tau(p)$ in $\tau(\pi)$ vzporedna afina podprostora $\mathbb{R}^3$?

3. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani premici:

$$p = \{[x : y : z] \mid z = 0\},$$
$$q = \{[x : y : z] \mid 2x - y = 0\}$$

in točki $A = [0 : 0 : 1]$ ter $B = [1 : 2 : 1]$.

- (a) Izberimo točko $D = [x : 2x : 1] \in q$ za nek $x > 0$ in naj bo $C = p \cap q$. Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.
- (b) Naj bo M množica vseh projektivnosti $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, za katere je $\theta(A) = A$ in $\theta(T) = T$ za vsako $T \in p$. Pokaži, da je množica M komutativna grupa.

4. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica $\mathcal{S}$, ki jo določajo točke $A = [1 : 0 : 1]$, $B = [1 : 1 : 1]$, $C = [-1 : 0 : 1]$, $D = [-1 : -1 : 1]$ in $E = [2 : 1 : \sqrt{2}]$.

- (a) Izračunaj enačbo stožnice $\mathcal{S}$.
- (b) Poišči pol premice $p = \{[x : y : z] \mid y = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$ in tangento na $\mathcal{S}$ v točki A .