

Afina in projektivna geometrija

3. izpit

3. 9. 2020

1. naloga (25 točk)

(a) Naj bo G podgrupa izometrij $\mathbb{R}^2$, ki jo generirata izometriji $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s predpisoma:

$$\tau_1(x, y) = (x, 2 - y),$$

$$\tau_2(x, y) = (2 - x, y).$$

Geometrično opiši vse elemente grupe G in nato ugotovi, kateri znani grupi je izomorfn.

(b) Zapiši predpis za rotacijo evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ za kot $\phi = \pi$ okoli premice p , ki jo določata točki $A(1, 0, 0)$ in $B(2, 1, 1)$.

2. naloga (25 točk)

(a) Ugotovi, koliko je različnih afinih transformacij $\tau : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$, za katere $\tau(2, 2) = (2, 2)$ in $\tau(4, 2) = (4, 2)$.

(b) Naj bo $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ afina transformacija in S množica njenih fiksni točk. Pokaži, da je S afin podprostor prostora $\mathbb{R}^n$.

3. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dane premice:

$$p = \{[x : y : z] \mid y = 0\},$$

$$q = \{[x : y : z] \mid y - z = 0\},$$

$$r = \{[x : y : z] \mid x = 0\}$$

in točka $B = [1 : 1 : 1]$.

(a) Definirajmo točki $A = q \cap r$ in $C = q \cap p$. Poišči takšno točko D na premici q , da bodo tvorile točke A, B, C in D harmonično četverko.

(b) Izračunaj predpis za projektivnost $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, za katero je $\theta(p) = q$, $\theta(q) = r$, $\theta(r) = p$ in $\theta([1 : 2 : 1]) = [1 : 1 : 3]$.

4. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica $\mathcal{S}$ z enačbo

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid x^2 - 2xy + 2y^2 - 4xz + 4yz + 3z^2 = 0\}.$$

(a) Izračunaj enačbi tangent p_1 in p_2 na stožnico $\mathcal{S}$, ki potekata skozi točko $[1 : 1 : 0]$.

(b) Naj bo $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ projektivnost, ki je dana s predpisom

$$\theta([x : y : z]) = [x - y - 2z : y : z].$$

Zapiši enačbo stožnice $\theta(\mathcal{S})$. Ali sta premici $\theta(p_1)$ in $\theta(p_2)$ tangentni na stožnico $\theta(\mathcal{S})$?