

Afina in projektivna geometrija

1. izpit

16. 6. 2021

1. naloga (25 točk)

- (a) Izometrija $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dana s predpisom $\tau(x, y, z) = (-x - 2, -z + 1, y - 1)$. Opiši geometrijski pomen izometrije τ .
- (b) Naj bosta S_1 in S_2 točki v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ in τ_1 ter τ_2 rotaciji za kot 90° okoli točk S_1 in S_2 . Poišče vse pare točk (S_1, S_2) , za katere rotaciji τ_1 in τ_2 komutirata.

2. naloga (25 točk)

Naj bodo A , B in C nekolinearne točke v afinem prostoru $\mathbb{R}^3$.

- (a) Pokaži, da vsaka afina transformacija $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslika težišče trikotnika ABC v težišče trikotnika $\tau(A)\tau(B)\tau(C)$.
- (b) Za $i = 1, 2, 3$ izberimo števila $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$ tako, da bo veljalo $x_i + y_i + z_i = 1$ in definirajmo točke $T_i = x_i A + y_i B + z_i C$. Pokaži, da so točke T_1 , T_2 in T_3 kolinearne natanko takrat, ko je

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana premica $p_\infty = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$ in točke $A = [0 : 0 : 1]$, $B = [1 : 0 : 1]$ in $C = [0 : 1 : 1]$.

- (a) Izračunaj predpis za projektivnost $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, ki preslika premico p_∞ nazaj nase in je določena s pogoji $\theta(A) = A$, $\theta(B) = C$ in $\theta(C) = B$.
- (b) Označimo z D presek premice AB in p_∞ . Poišči takšno točko E na premici AB , da bodo tvorile točke A , B , D in E harmonično četverko.

4. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid -3x^2 - 8xy + 3y^2 + 4\sqrt{5}xz + 2\sqrt{5}yz - 10z^2 = 0\}.$$

- (a) Izračunaj presek stožnice $\mathcal{S}$ s premico $p_\infty = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$. Za vsako točko v preseku izračunaj tangento na stožnico v tej točki.
- (b) Ugotovi, ali je premica $p = \{[x : y : z] \mid 2x - y = 0\}$ tangentna na $\mathcal{S}$.
- (c) Skiciraj zožitev stožnice $\mathcal{S}$ na afini del projektivne ravnine, ki ustreza $z = 1$.