Afina in projektivna geometrija

2. izpit

18. 8. 2021

1. naloga (25 točk)

(a) V evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ je dan trikotnik ABC z oglišči $A(0,0)$, $B(1,0)$ in $C(0,1)$. Označimo s τ_{AB}, τ_{BC} in τ_{AC} zrcaljenja preko nosilk stranic trikotnika. Izračunaj predpis izometrije $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki je dana kot kompozicija

$$\tau = \tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{AC},$$

in nato opiši njen geometrijski pomen.

(b) Naj bo $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ izometrija s predpisom $\tau(\vec{x}) = R\vec{x}$, kjer je R ortogonalna 3×3 matrika z $\det(R) = 1$. Pokaži, da lahko izometrijo τ zapišemo kot kompozicijo dveh zrcaljenj čez neki ravnini v $\mathbb{R}^3$.

2. naloga (25 točk)

V afinem prostoru $\mathbb{R}^3$ je dan trikotnik ABC z oglišči $A(1,3,-1)$, $B(2,1,0)$ in $C(0,-1,4)$ ter premica p skozi točki $D(-1,3,1)$ in $E(3,-1,1)$.

(a) Ugotovi, ali je presek premice p in notranjosti trikotnika ABC neprazen.

(b) Poišči predpis kakšne afine transformacije $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki hkrati preslika trikotnik ABC in premico p v ravnino $z = 0$.

3. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{Z}_3^3)$ je dana premica $p = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$.

(a) Naj bo M množica vseh projektivnosti $\theta : P(\mathbb{Z}_3^3) \to P(\mathbb{Z}_3^3)$, za katere je $\theta(p) = p$. Pokaži, da je množica M končna grupa in izračunaj, koliko elementov ima M.

(b) Poišči predpise vseh projektivnosti $\theta \in M$, ki zadoščajo pogojem $\theta([1 : 0 : 1]) = [0 : 1 : 1]$, $\theta([0 : 1 : 1]) = [0 : 0 : 1]$ in $\theta([0 : 0 : 1]) = [1 : 0 : 1]$.

4. naloga (25 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica $\mathcal{S}$, ki vsebuje točke $A = [1 : -2 : 1]$, $B = [-2 : 5 : 1]$, $C = [-1 : 2 : 1]$, $D = [2 : -5 : 1]$ in $E = [-1 : 3 : \sqrt{2}]$.

(a) Izračunaj enačbo stožnice $\mathcal{S}$.

(b) Poišči enačbe vseh tangent na $\mathcal{S}$, ki potekajo skozi točko $T = [-1 : 3 : 1]$.