

Restve 2. Kolonij

21/22

1. nalogu A vestija

$$X + A = XA + B^T A$$

$$X(I - A) = (B^T - I)A$$

$$X = (B^T - A)A(I - A)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B vestija

$$X + B = AX + AB^T$$

$$(I - A)X = AB^T - B$$

$$X = (I - A)^{-1}(AB^T - B)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. naloga A in B

$n=1$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = \underline{x^2 - y^2}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \overset{+}{\underset{-}{x}} & & & & \overset{+}{\underset{-}{y}} \\ & x & & & y \\ & & \ddots & & \\ & & x & y & \\ & & y & x & \\ & y & & & x & x \end{vmatrix} =$$

$$x \begin{vmatrix} x & & & & y & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & x & y & & \\ & & y & x & & \\ & y & & & & \\ 0 & & & & & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & & & y \\ & \ddots & & & \\ & & x & y & \\ & & y & x & \\ & y & & & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2 - y^2) \begin{vmatrix} x & & & & y \\ & \ddots & & & \\ & & x & y & \\ & & y & x & \\ & y & & & x \end{vmatrix} = (x^2 - y^2) D_{n-1}$$

$$\Rightarrow D_n = \underline{(x^2 - y^2)^n}$$

3. naloga (A)

asociativnost $\Rightarrow$ matrično množenje je asociativno

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+x & b+y+az \\ & 1 & c+z \\ & & 1 \end{pmatrix} \in H$$

H je zaprt za operacijo

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ & 1 & -c \\ & & 1 \end{pmatrix} \in H$$

$\rightarrow$ samo cela števila

H je zaprt za inverz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

H je neasociativno

Homomorfizem

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) = (a, c)$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) + \phi\left(\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) = (a+x, c+z)$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) = (a+x, c+z)$$

(B)

množenju matrik je asociativno

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ a & 1 & \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ x & 1 & \\ y & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ a+x & 1 & \\ b+cx+y & c+z & 1 \end{bmatrix} \in H$$

H je zaprt za operacijo

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ a & 1 & \\ b & c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -a & 1 & \\ -b+ac & -c & 1 \end{bmatrix}$$

H je zaprt za inverz

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii Rotations

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\#}$$

Homomorphism $\phi(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ a & 1 & \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\phi((a, b) + (x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ a+x & 1 & \\ b+y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ a & 1 & \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ x & 1 & \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ a+x & 1 & \\ b+y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. naloga

$A \text{ in } B$

R je zaprt za $\circ$ (R je zaprt za $+$ in $\cdot$)

asociativnost

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a + b - ab) \circ c \\&= a + b - ab + c - (a + b - ab) \cdot c \\&= a + b + c - ab - ac - bc + abc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \circ (b \circ c) &= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) \\&= a + b + c - bc - ab - ac + abc \quad \checkmark\end{aligned}$$

enota

$$0 \circ a = 0 + a - 0 \cdot a = a$$

$$a \circ 0 = a + 0 - a \cdot 0 = a$$

$\boxed{0 \text{ je enota}} \rightarrow (R, \circ) \text{ je monoid}$

$$\underline{1 \in R}$$

$$(1-a)(1-b) = 1$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{1-a-b+ab=1}$$

$$\stackrel{(\Leftarrow)}{a+b-ab=0}$$

$$a+b-ab=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a \circ b = 0$$

$$(1-r)(1-s) = 1 \Leftrightarrow r \circ s = 1$$

$$(1-s)(1-r) = 1 \Leftrightarrow s \circ r = 1$$

$1-s$ je levi in desni inverz $1-r$ za $\cdot$.

$$\Leftrightarrow$$

s je levi in desni inverz r za $\circ$.