

1) Baza V l. Naloga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

di

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) $u_2 + V$

$$x = 7 - 13 \cdot \frac{3}{4} \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 & -7 \\ 1 & -8 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2 \\ -2 \\ -2 \\ -2}} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -13 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

baza $U_2 + V$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ali hatawoli
baza U_2 .

$$\begin{aligned} 3) \quad \dim U_2 \cap V &= \dim U_2 + \dim V - \dim(U_2 + V) \\ &= 3 + 2 - 3 = \underline{2} \end{aligned}$$

4)

$$2 + 3a - 3 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$$

$$8 - 8 = 0$$

$$1 - 4a + 4 - a = 0 \rightarrow a = 1$$

$$4 - 4 = 0$$

$$1 + 3a - 1 - 2a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$$

$$4 - 4 = 0$$

$$U_a \subseteq V \quad \forall a \quad a = 1$$

2. naloga

1) Linearlost sledi iz lastnosti množenja matrik.

$$\begin{aligned}
 2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[L_A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3) 1. možnost v bazi

$$\{e_{11}, e_{21}, e_{31}, \dots, e_{n1}, e_{12}, e_{22}, \dots, e_{n2}, \dots, e_{1n}, \dots, e_{nn}\}$$

je matrika preslikave L_A enak

$$\begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix}$$

$\leadsto$ karakteristični polnom

$$\chi_{L_A} = (\chi_A)^n \leadsto \text{polnoma imata iste ničle.}$$

2. možnost

Naj bo X lastni vektor A z
lastno vrednostjo λ , potem je

$X = [v, v \dots v]$ lastni vektor L_A z
lastno vrednostjo λ

Naj bo X lastni vektor L_A
z lastno vrednostjo λ . Potem je
pri stolpec X lastni vektor A z
lastno vrednostjo λ .

3. nologa

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 2a-1-\lambda & -2a+3 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 2a-1-\lambda & -2a+3 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\left((2a-1)-\lambda \right) (1-\lambda) + 2a-3 =$$

$$= \lambda^2 - 2a\lambda + 2a-1 + 2a-3$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 4a-4 = (\lambda-2)(\lambda-2a+2)$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(2a-2-\lambda)$$

Lastni vektor zu 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2\alpha-2 & -2\alpha+3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

✓
Lastni vektor zu 1

Lastni vektor zu 2

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2\alpha-3 & -2\alpha+3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \text{Lastni vektor zu 2}$$

Lastni vektor za $2a-2$

$$\begin{bmatrix} 3-2a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2a+3 \\ 0 & 1 & -2a+3 \end{bmatrix} \xrightarrow{+}$$

$$2a-1-2a+2$$

$$\begin{bmatrix} 3-2a & 2 & -1 \\ & 1 & -2a+3 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} 3-2a & 2 & -1 \\ & 1 & -2a+3 \end{array}$$

1. možnost

$$3-2a=0 \quad \left(a=\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lastni vektor za $1 = (2a-2)|_{a=\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. worst

$$a \neq \frac{3}{2}$$

$$3-2a$$

$$\begin{bmatrix} 3-2a & 0 & 4a-7 \\ & 1 & -2a+3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4a-7}{2a-3} \\ 2a-3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oe ji

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ji$$

$$2a-2=2 \quad (a=2)$$

$$\text{evlo let } 7a \quad \lambda=2$$

če je $a \neq 2$ in $a = \frac{3}{2}$

potem ima A diagonalizacijo

če je $a = 2$, potem ima A

samo en lastni vektor za l.v. 2.

$\rightarrow A$ nima diagonalizaci;

če je $a = \frac{3}{2}$, potem ima A

samo 1-lastni vektor za 1 $\rightarrow$

nima diagonalizacije.

Minimalni polinom je $- \chi_A$

4. naloga

1) $A^{-1}(AB)A = BA$

2) Če je A ali B obrnljiva matrika, potem sta si AB in BA podobni $\Rightarrow$ imata iste lastne vrednosti

Če A in B nista obrnljivi, potem imata AB in BA netrivialno jedro

$\Rightarrow 0$ je skupna lastna vrednost

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\swarrow$ očitno si nista podobni