

Pregled funkcij - modeliranje

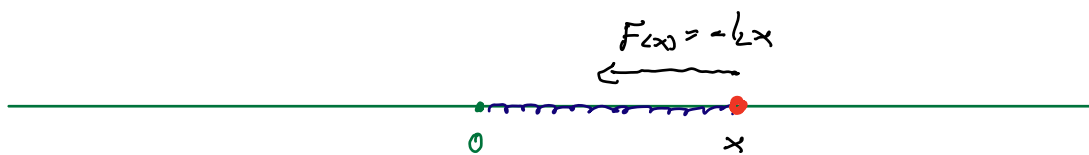
Ena od najpomembnejših upravnih funkcij $\cos(x)$ in $\sin(x)$ je opis harmoničnega nihala

Opisujemo gibanje telesa, ki se giblje po premici pod vplivom sile F . Po drugem Newtonovem zakonu imamo:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{F} & = & m & a & \\ \nearrow & & \uparrow & \nwarrow & \\ \text{sila} & & \text{masa} & & \text{pospešek} \\ & & \text{telesa} & & \text{telesa} \end{array}$$

Naj bo sila F , ki deluje na premico dolžine x različna med izhodnimi in točko x , in kateri deluje - v tej točki se nahaja naš teles.
Naj naš silo opišemo Hookov zakon

$$F(x) = -kx \quad k > 0 \quad (*)$$



Nij bo enaki mrtzamsli $m = 1$. Polom
Imamo:

$$F = a$$

leže delca x je odvisen od časa t . Torej:

leže delca je funkcija $x = x(t)$

Spremenimo se: Pospešek je drugi odvod leže
po času.

$$a = x''(t)$$

Imamo torej:

$$F = x''(t)$$

$$x''(t) = F$$

le F vključno Hookovo silo $(*)$, dobimo

$$x''(t) = -k x(t)$$

Nj bo ze $\ell = 1$

$$x''(t) = -x(t) \quad (**)$$

Gibanje delce bo kraj splošnovalne neke funkcije,
za katero velja: Če jo določimo odločimo,
določimo to funkcijo, predstavljeno z repetitivnim
gibanjem.

Videli bomo:

$$\cos'(t) = -\sin(t)$$

$$\sin'(t) = \cos(t)$$

$$\begin{aligned}\cos''(t) &= (\cos'(t))' = (-\sin(t))' = \\ &= -\cos(t)\end{aligned}$$

Več kraj

$$\cos''(t) = -\cos(t)$$

Na isti način bi videli

$$\sin''(t) = -\sin(t)$$

Trag: Welche sind die richtigen Ergebnisse (**)

$$x_1(t) = \cos(t)$$

$$x_2(t) = \sin(t)$$

Hierzu wiederum, die ref: In polynomischer
besteht $a, b \in \mathbb{R}$ immer

$$f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a \cos(x) + b \sin(x))' = \\ &= \left[(a \cos(x) + b \sin(x))' \right]' \end{aligned}$$

$$= [a \cos'(x) + b \sin'(x)]' =$$

$$= [-a \sin(x) + b \cos(x)]' =$$

$$= -a \sin'(x) + b \cos'(x) =$$

$$= -a \cos(x) - b \sin(x) =$$

$$= - (a \cos(x) + b \sin(x)) ,$$

V našem prípade je možná symetria t ,
tvoj; a je

$$f(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$$

potom imo:

$$f''(t) = - (a \cos(t) + b \sin(t)) =$$

$$= - f(t)$$

Tvoj

$$f''(t) = - f(t) .$$

Stavim si odtiaľto: Každá rešiteľná rovnica

$$x'' = -x$$

je funkčnej odtiaľto

$$x(t) = a \cos(t) + b \sin(t) ,$$

ķipr šķēd a un b pašiem nosaukti šķēdēti

Kad šķēdēti pašiem šķēdēti harmoniskajiem
nolikt šķēdēti šķēdēti šķēdēti šķēdēti

$$x(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$$

Ķēdēti a un b šķēdēti šķēdēti šķēdēti
šķēdēti šķēdēti šķēdēti šķēdēti šķēdēti

$$\begin{aligned} x(0) &= A \\ x'(0) &= B \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x(0) &= A \\ x'(0) &= B \end{aligned}} \right\} \text{Zināmi šķēdēti}$$

$$x(0) = a \underbrace{\cos(0)}_1 + b \underbrace{\sin(0)}_0 = a$$

Tātad,

$$\underline{a} = A$$

$$x'(0) = -a \underbrace{\sin(0)}_0 + b \underbrace{\cos(0)}_1 = B$$

Trg: $b = B$

Resitljiva problema

$$x'' = -x$$

$$x(0) = A, \quad x'(0) = B$$

je trg funkcije

$$\underline{x(t) = A \cos(t) + B \sin(t)}$$

Funkcije zpraj oblike se imenujejo *sinnsoide*

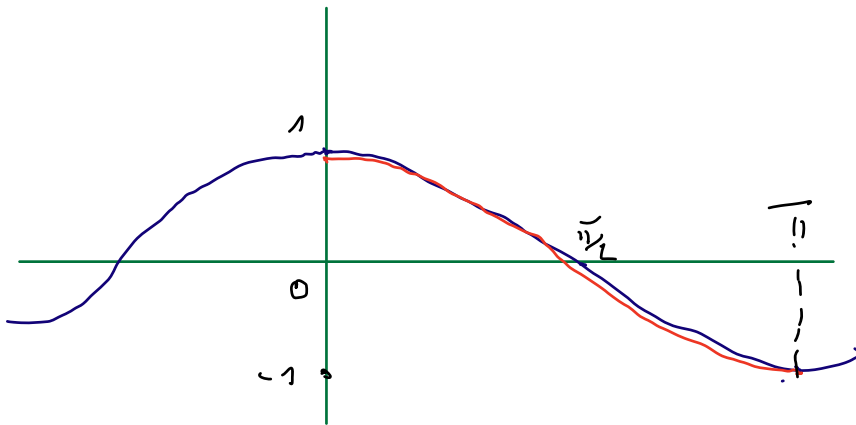
$$x(t) = A \sin(\omega x + \varphi)$$

$$x(t) = A \cos(\omega x + \varphi)$$

Ciklometrične funkcije

Ciklometrične funkcije so inverzne funkcije
kotnih funkcij

Zaradi zvlaste periodičnosti se moramo
omejiti na interval, na katerem sta
 $\cos(x)$ in $\sin(x)$ bijektivni, brez monotonosti.



Opazujemo torej:

$$\cos(x) : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

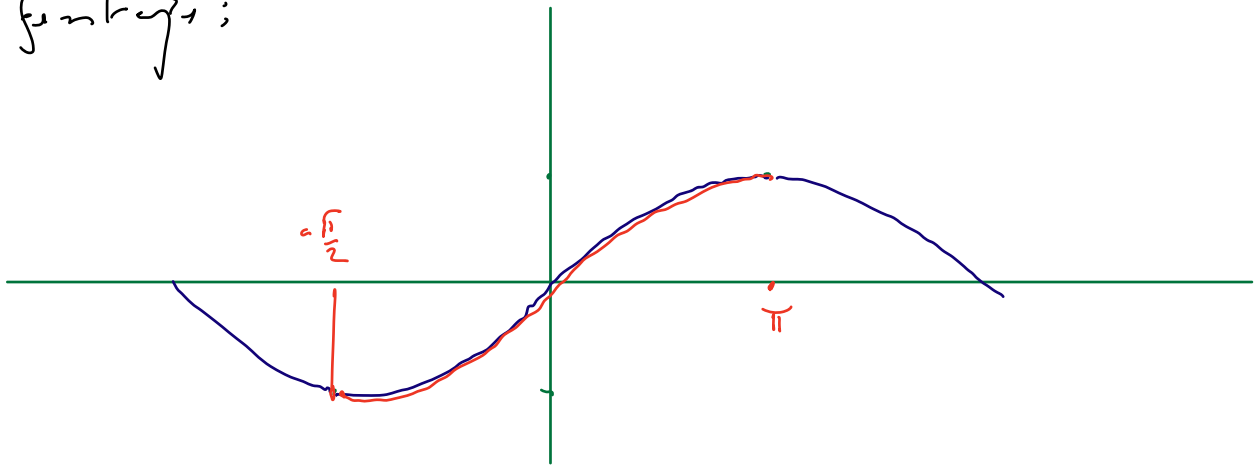
Definicija Inverzne funkcije zpraj funkcij
je funkcija

$$\underline{\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]},$$

ki jë përdorur s' përdorim

$$\underline{\arccos(x) = y \iff \cos(y) = x}$$

Gjeras si shpreh sinusin në një funksion
invers;



Funksion

$$\sin(x) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] \quad (*)$$

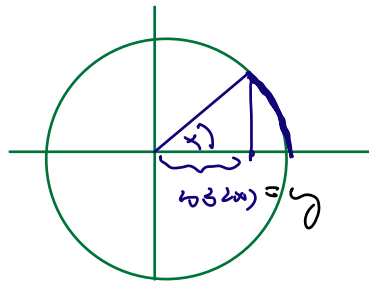
jë monotone rritëse.

Definiere: Invers funksion funksion (*) j' funksion

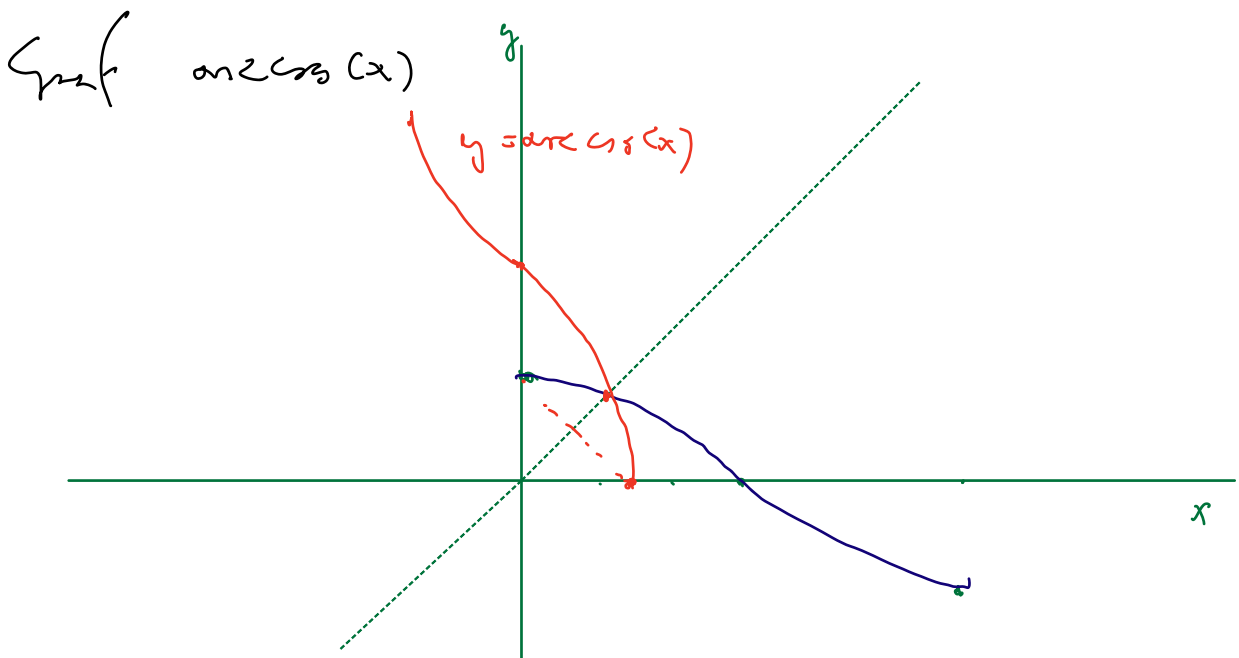
$$\underline{\arcsin(x) : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

h: p' podane s predpisom

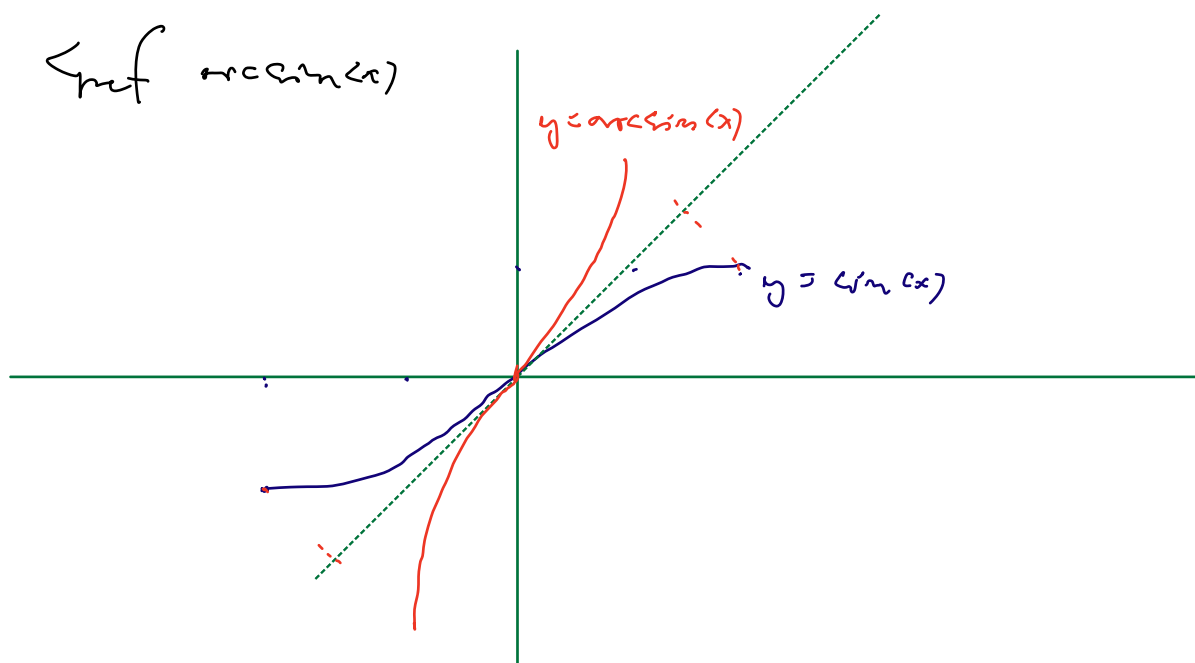
$$\underline{\arcsin(x) = y \Leftrightarrow \sin(y) = x}$$



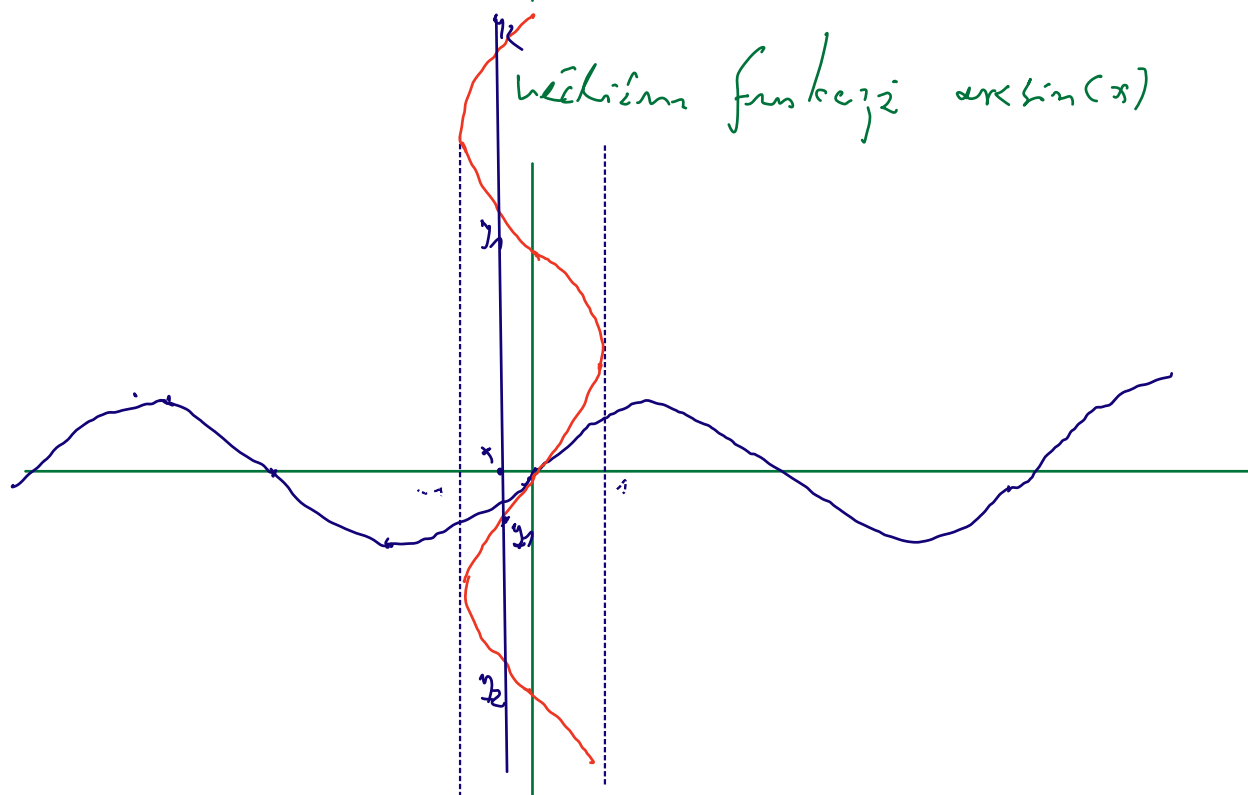
$$\arccos(y) = x \Leftrightarrow \cos(x) = y$$



Graph $\arcsin(x)$



Sketching function $\arcsin(x)$



Opisano je inverzni funkciji funkcij $\tan(x)$
 in $\cotan(x)$

Def: Ciklotometrične funkcije

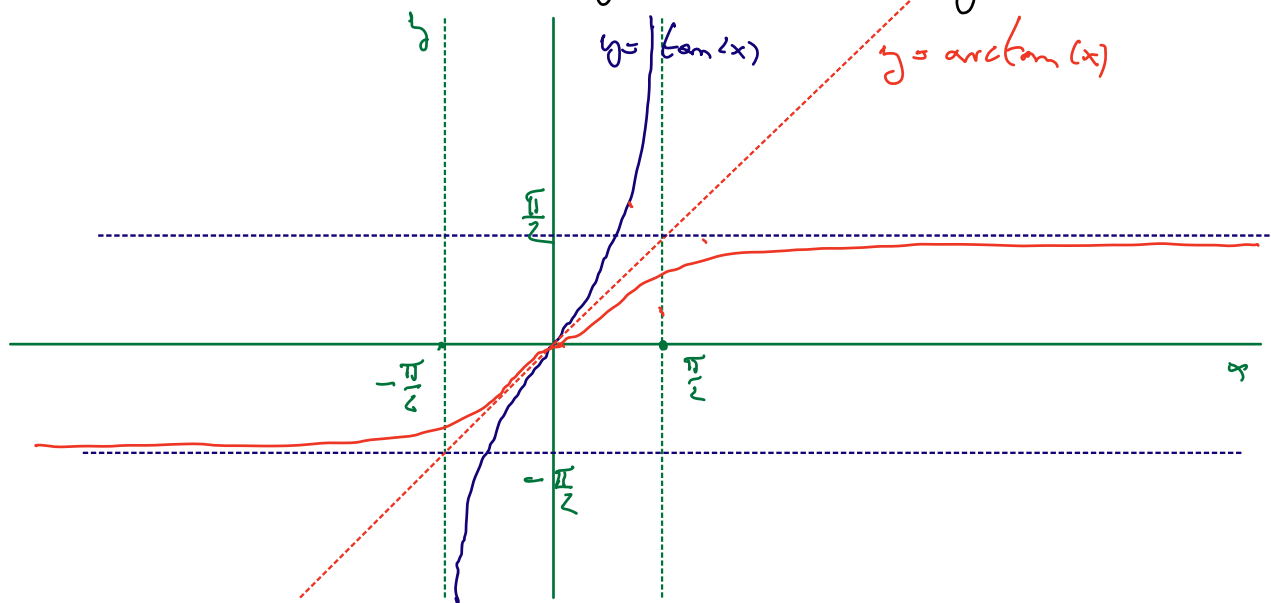
$$\arctan: \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

je inverzna funkcija funkcije

$$\tan: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

in je produkt s preizkusom

$$\arctan(x) = y \Leftrightarrow \tan(y) = x$$



Definujz: Funkcijz

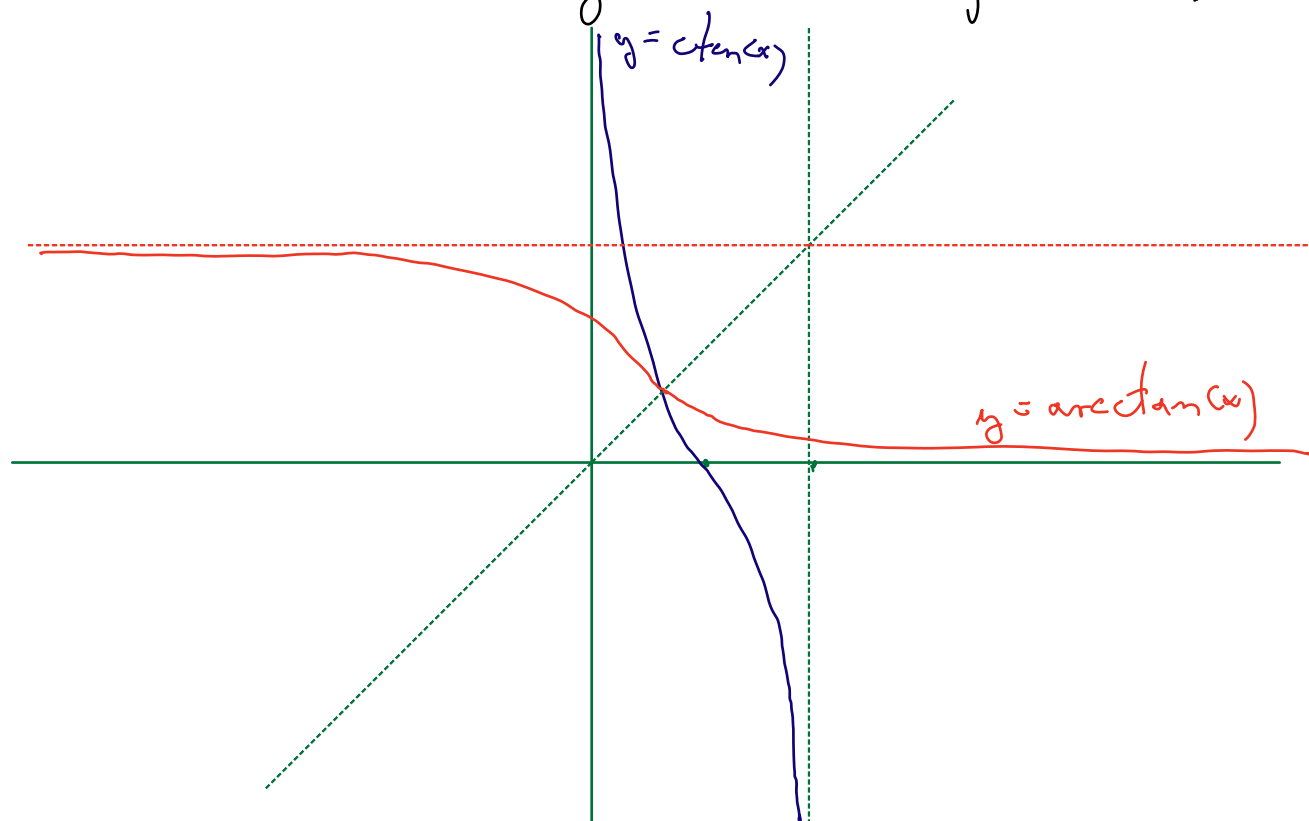
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \pi]$$

je inverzna funkcija funkcije

$$\tan : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Poznaje je s preslikavanjem

$$\arctan(x) = y \Leftrightarrow \tan(y) = x.$$



EkspONENTA in logaritmiška funkcija

~~Definicija~~ Nj. 60 $a \in \mathbb{R}^+$, EkspONENTNA funkcija z osnovo a je funkcija, podana s prepisom

$$f(x) = a^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

kjer a^x je potekoma definirati: To bomo naredili postopno.

1.) $x \in \mathbb{N}$ $x = n$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n$$

Definimo

$$a^0 = 1$$

Definisi kali $m > 0$

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Opsiusi:

$$a^m \cdot a^{-m} = 1 = a^0$$

$$2.) \quad x \in \mathbb{Q} \quad x = \frac{p}{q}$$

Najpegj definisio

$$a^{\frac{1}{2}}$$

s predpisom:

$$a^{\frac{1}{2}} = z \Leftrightarrow z^2 = a$$

Nato definisio $a^{\frac{p}{q}}$ s predpisom:

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = z^p$$

Nij ho sebi $x \in \mathbb{R}$ pojmla nalo itenlo.

Mij h₂

$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$

Zapraszamy do udziału w konkursie, bo każdy może.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = x$$

Próbujemy definiować:

$$a^{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{f_n}$$

Teraz:

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{f_n}, \quad (*)$$

Jeśli $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zapisać w $\mathbb{R}$, to

każdy może

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = x.$$

Definiujemy nasz rodzaj funkcji

$$a^x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longmapsto a^x$$

Skiniš a se imenij osnovi.

Poznambe osnove;

$$a = 2, \quad a = 10, \quad a = e$$

Najpomembnejša lastnost, ki jo rešuje eksponentna funkcija je

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

Ta lastnost jo re eksponentna funkcija karakterizira. Torej: Če re nek zvezo funkcija $f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ velja

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),$$

poštem abstraktnu $a \in \mathbb{R}^+$, tako da velja

$$f(a) = a^x$$

Dokazujemo to naše tvrdnje:

Naj bismo x_1, x_2 najprije namu ščitli m_1, m_2

Tadlimo:

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} = a^{m_1+m_2}$$

Res:

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m_1} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m_2} = a^{m_1+m_2}$$

Leto se j prepričati, da zpraj abstraktni ščitli
 se pafunden po celih ščitli:

$$a^{m_1} \cdot a^{-m_2} = \underbrace{a \cdots a}_{m_1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{1}{a}\right) \cdots \left(\frac{1}{a}\right)}_{m_2} = \underbrace{a \cdots a}_{m_1-m_2} = a^{m_1-m_2}$$

Nyíltan legyen x_1 és x_2 nemnulla számok

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} \quad , \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2}$$

Definiáljuk

$$\left(a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} \right)^{q_1 q_2} = \left(a^{\frac{p_1}{q_1}} \right)^{q_1 q_2} \cdot \left(a^{\frac{p_2}{q_2}} \right)^{q_1 q_2} =$$

$$= a^{\frac{p_1}{q_1} \cdot q_1 q_2} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2} \cdot q_1 q_2} =$$

$$= a^{p_1 q_2} \cdot a^{p_2 q_1} = a^{p_1 q_2 + p_2 q_1}$$

$$\left[\left(a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} \right)^{q_1 q_2} \right]^{\frac{1}{q_1 q_2}} = \left(a^{p_1 q_2 + p_2 q_1} \right)^{\frac{1}{q_1 q_2}} =$$

$$= a^{(p_1 q_2 + p_2 q_1) \frac{1}{q_1 q_2}} = a^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}$$

Tehát:

$$\underline{a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} = a^{\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \right)}}$$

Tehát, most könnyen ellenőrizhetjük az 1. és 2.

reciprocal strictly.

2 points definition (*) obtain $\bar{a}$ refines
max relation

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

22 perfect per relation strictly $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$a^{s_n^1} \cdot a^{s_n^2} = a^{s_n^1 + s_n^2} \quad s_n^1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1 \quad , \quad s_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2 .$$