

Domača naloga iz Teorije mere

29. december 2021

Rok za oddajo je 16. 1. 2021. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

1. naloga

Definirajmo

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}: 2n \in E \iff 2n+1 \in E\}.$$

- a) Pokaži, da je $\mathcal{A}$ σ -algebra na $\mathbb{Z}$.
- b) Katere od množic $\{0\}$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ in $\{2, 4\}$ so merljive?
- c) Naj bo funkcija $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ podana s predpisom $f(n) = n-2$. Katera od funkcij $f, f^{-1}: (\mathbb{Z}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ je merljiva?

2. naloga

Naj bo $B_{\mathbb{R}}$ Borelova σ -algebra realne osi in

$$\mu(E) = \delta_0(E) + m(E \cap [\tfrac{1}{2}, 1]), \quad E \in B_{\mathbb{R}}.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$f_n = \sqrt{n} \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \quad \text{in} \quad g_n = \sqrt{n} \chi_{[\frac{n-1}{n}, 1]}.$$

- a) Dokaži, da je μ pozitivna končna mera na $B_{\mathbb{R}}$.
- b) Za vsako od zaporedij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ugotovi, če konvergira proti funkciji 0
- i) skoraj povsod,
 - ii) po meri,
 - iii) skoraj enakomerno.

3. naloga

a) Dokaži:

$$\int_0^1 \frac{x \ln x}{x^3 - 1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}.$$

b) Dokaži:

$$\frac{29}{100} \leq \int_0^1 \frac{x \ln x}{x^3 - 1} dx \leq \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{54}.$$

4. naloga

Naj bo $f: [0, 1] \rightarrow [1, \infty)$ zvezna funkcija.

a) Dokaži, da je funkcija F , definirana s predpisom

$$F(x, y) = (f(y) - f(x))(\ln f(y) - \ln f(x)),$$

nenegativna funkcija na $[0, 1] \times [0, 1]$.

b) Utemelji, da Lebesgueov integral

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} F d(m \times m)$$

obstaja in je nenegativno število.

c) Dokaži, da velja

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \ln f(x) dx \leq \int_0^1 f(x) \ln f(x) dx.$$

5. naloga

Naj bo m Lebesgueova mera na intervalu $[0, 1]$, opremljenim z Lebesgueovo σ -algebro $\mathcal{L}$. Za vsak $\alpha \in \mathbb{C}$ izberemo $E_\alpha \in \mathcal{L}$ in definiramo

$$\lambda_\alpha(A) = \alpha m(A \cap E_\alpha), \quad A \in \mathcal{L}.$$

a) Dokaži, da je λ_α kompleksna mera na $\mathcal{L}$.

Naj bosta $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

b) Poišči potreben in zadosten pogoj, da sta meri λ_α in λ_β vzajemno singularni.

c) Dokaži, da je mera $\lambda_\alpha + \lambda_\beta$ absolutno zvezna glede na mero m in izračunaj $\frac{d(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)}{dm}$.