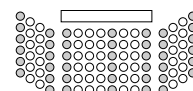


Drugi kolokvij iz Uvoda v diferencialno geometrijo

16. januar 2013

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 105 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.01)

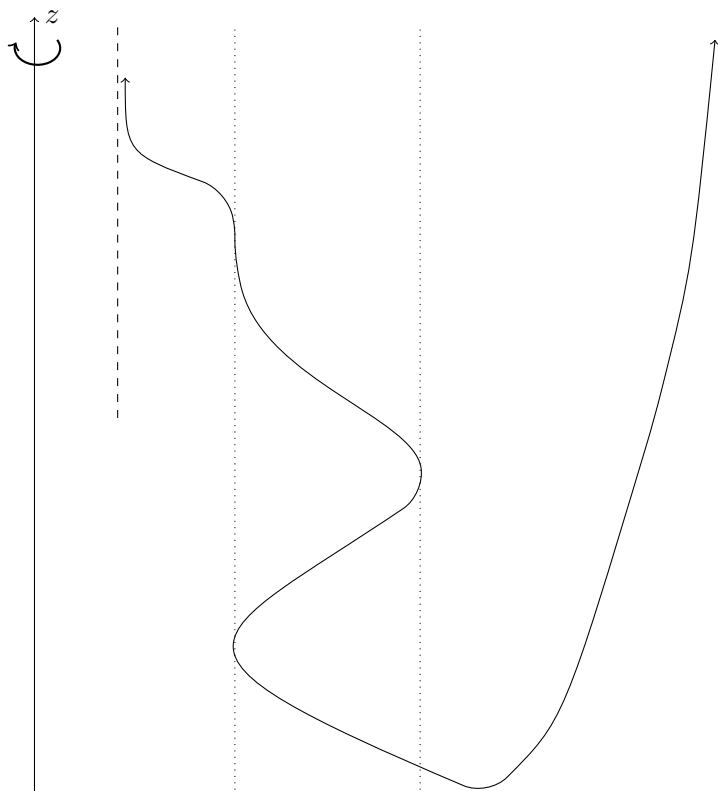
--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

1. naloga (30 točk)

Naj bo S rotacijska ploskev, ki jo dobimo ob rotaciji spodnje krivulje okoli osi z , kot to kaže slika. Pomožne črtkaste črte označujejo asimptoto, pomožne pikčaste črte pa označujejo točke z isto oddaljenostjo od osi rotacije. Funkcija oddaljenosti od osi vrtenja ima en lokalni maksimum, en lokalni minimum ter eno sedlo. Nariši in kvalitativno opiši geodetke na ploskvi S .

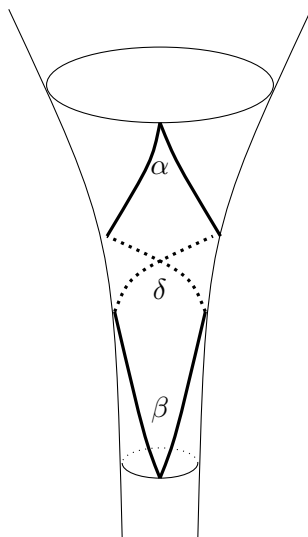


2. naloga (50 točk)

Podana je funkcija $f(r) = \sqrt{1-r^2} - \operatorname{arcosh}(r^{-1})$, $0 < r < 1$. Poleg tega je podana parametrizacija rotacijske ploskve P :

$$\sigma(r, v) = (r \cos(v), r \sin(v), f(r)).$$

- (i) Predpis $(x, f(x))$ podaja ravninsko krivuljo γ . V točki $(x_0, f(x_0))$ izračunaj oba enotska tangentna ter oba enotska normalna vektorja na krivuljo γ .
- (ii) Z uporabo točke (i) zapiši obe enotski normalni na ploskev P v točki $\sigma(r_0, v_0)$.
- (iii) Z uporabo fundamentalnih form (torej po definiciji) izračunaj Gaussovo ukrivljenost ploskve P .
- (iv) Izračunaj geodetsko ukrivljenost vzporednikov na P .
- (v) Izračunaj površino ploskve P med dvema vzporednikoma na dva načina: s ploskovnim integralom ter z uporabo Gauss-Bonnetovega izreka.
- (vi) Na spodnji sliki sta podani dve geodetki. Sekata se na vzporedniku $r = 1/4$ pod kotom β , na vzporedniku $r = 1/2$ pod kotom α ter se še nekje vmes pod kotom δ , kot to kaže slika.
 - (a) Izrazi kot α s kotom β .
 - (b) Ugotovi na koliko delov razdelita geodetki območje med vzporednikoma $r = 1/2$ ter $r = 1/4$. Za vsak del izračunaj njegovo ploščino.



3. naloga (25 točk)

Krivulja γ , podana kot presek orientiranih ploskev S_1 in S_2 , naj ima povsod pozitivno ukrivljenost κ . Naj $\mathbf{n}_1$ in $\mathbf{n}_2$ predstavljata normalo na ploskvah S_1 in S_2 (seveda odvisno od točke na ploskvi), $\mathbf{n}$ pa naj predstavlja normalo krivulje. Poled tega naj bosta $\kappa_n^{(1)}$ ter $\kappa_n^{(2)}$ normalni ukrivljenosti krivulje γ na S_1 ter S_2 .

- (i) Dokaži:

$$\kappa(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{n} = \kappa_n^{(1)} \mathbf{n}_2 - \kappa_n^{(2)} \mathbf{n}_1.$$

- (ii) Naj α označuje kot med ploskvama S_1 in S_2 vzdolž krivulje γ . Dokaži:

$$\kappa^2 \sin^2 \alpha = (\kappa_n^{(1)})^2 + (\kappa_n^{(2)})^2 + 2\kappa_n^{(1)} \kappa_n^{(2)} \cos \alpha.$$