POSPLOŠENI INTEGRALI S PARAMETROM

OSNOVNA TEORIJA:

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt \quad , \quad I \subseteq \mathbb{R} \text{ INTERVAL}$$

(i) ČE $f(x,t)$ ZVEZNA NA $I \times [a,b]$, JE $F(x)$ ZVEZNA NA I

(ii) ČE $f(x,t)$ PARCIALNO ZVEZNO ODVEDLJIVA PO x NA $I \times [a,b]$, JE F ODVEDLJIVA NA I IN $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

(iii) ČE $f(x,t)$ ZVEZNA NA $[c,d] \times [a,b]$, JE $F(x)$ INTEGRABILNA NA $[c,d]$ IN JE $\int_c^d F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,dx \right) dt$.

NAŠA ŽELJA: IMETI TE TRI IZREKE TUDI ZA $b = \infty$.

DODATEN POGOJ, KI SE RABI:

$F(x,t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ JE ENAKOMERNO KONVERGENTEN NA I, ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA $b > a$, DA JE
$$\left| \int_b^\infty f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon \quad \text{ZA VSE } x \in I.$$

LAŽJA VERZIJA TEGA POGOJA:

$F(x,t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ JE ENAKOMERNO KONV. NA I, ČE OBSTAJA FUNKCIJA $g(t)$ Z LASTNOSTMA:

(i) $|f(x,t)| \leq g(t)$ ZA VSE $x \in I$.

(ii) $\int_a^\infty g(t) < \infty$.

TEJ FUNKCIJI REČEMO MAJORANTA.

IZBOLJŠAVA OSNOVNE TEORIJE ZA $b=\infty$:

(i) ČE $f(x,t)$ ZVEZNA NA $I\times[a,\infty)$ IN JE $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ ENAKOMERNO KONV. NA I, JE F ZVEZNA NA I.

(ii) ČE $f(x,t)$ ZVEZNO PARC. ODVEDLJIVA PO x NA $I\times[a,\infty)$ TER JE $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ ENAKOM. KONV. NA I, POTEM JE $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ ODVEDLJIVA NA I IN VELJA:

$$F'(x)=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\,.$$

(iii) ČE JE $f(x,t)$ ZVEZNA NA $[c,d]\times[a,\infty)$ IN JE $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ ENAK. KONV. NA $[c,d]$, JE $F(x)$ INTEGRABILNA NA $[c,d]$ TER JE:

$$\int_c^d F(x)\,dx=\int_a^\infty\left(\int_c^d f(x,t)\,dx\right)dt\,.$$

PRIMER: $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2y^2}\,dy$

DOLOČI D_F. ALI JE $F(x)$ ZVEZNA FUNKCIJA?

REŠITEV:

$f(x,y)=\frac{x}{1+x^2y^2}$ TA FUNKCIJA JE ZVEZNA IN DOBRO DEFINIRANA NA $\mathbb{R}^2$.

ČE BI BILA TUDI ENAKOMERNO KONV. NA $\mathbb{R}$, BI MORALA BITI TAM ZVEZNA. VENDAR TO NI RES, SAJ VELJA:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2y^2}\,dy=\operatorname{sgn}(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{arctg} t\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty}$$

$$=\operatorname{sgn}(x)\cdot\pi$$

$t=xy$

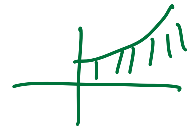
$dt=x\,dy$

$$F(x)=\begin{cases}\pi, & x>0\\ 0, & x=0\\ -\pi, & x<0\end{cases}$$

TA FUNKCIJA NI ZVEZNA, ZATO NE MORE BITI ENAKOM. KONV. NA $\mathbb{R}$.

PRIMER: $F(x)=\int_0^\infty e^{x\sqrt{t}}\,dt$

$x>0$ $e^{x\sqrt{t}}$



REŠITEV: ZA $x\geq 0$ GRE $e^{x\sqrt{t}}\to\infty$ ZA $t\to\infty$. TOREJ SE INTEGRALA NE DA IZRAČUNATI

$x<0$

ZA $x<0$ TA INTEGRAL OBSTAJA.

FUNKCIJA $f(x,t)=e^{x\sqrt{t}}$ JE ZVEZNA NA $(0,\infty)\times[0,\infty)$.

ČE ŽELIMO, DA JE F ZVEZNA, PA MORA BITI TUDI ENAKOMERNO KONVERGENTNA. TUDI TOKRAT TEGA NI TREBA DELATI PO IZREKU, KER SE IZRAČUNA DIREKTNO:

$$F(x)=\int_0^\infty e^{x\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{-\infty} e^{s}\cdot\frac{2s}{x^2}\,ds =$$

PER PARTES

$s=x\sqrt{t}$

$ds = x\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$dt = 2\,\frac{s}{x}\cdot\frac{1}{x}\,ds$

(x JE NEGATIVEN)

$$=\frac{1}{x^2}\left(2s\cdot e^{s}\Big|_{s=0}^{s=-\infty} - 2\int_0^{-\infty} e^{s}\,ds\right)=$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(-2e^{s}\Big|_0^{-\infty}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot 2=\frac{2}{x^2}$$

SKLEP: $F(x)=\frac{2}{x^2}$ JE ZVEZNA NA $(-\infty,0)$.

ISTO ZA (b) PRIMER.

③ $$F(x)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{y(1+y^2)}\,dy, \quad x\in\mathbb{R}.$$

IZRAZI F.

REŠITEV: RADI BI ODVAJALI POD INTEGRALOM. ZA TO MORA BITI $F'(x)$ ENAKOM. KONV.

$$F'(x)=\int_0^\infty \frac{\frac{1}{1+(xy)^2}\cdot y}{y(1+y^2)}\,dy=\int_0^\infty \frac{dy}{(1+x^2y^2)(1+y^2)}$$

ALI JE TA FUNKCIJA ENAK. KONV? DA:

~ $$\frac{1}{(1+x^2y^2)(1+y^2)}\le\frac{1}{1+y^2}=g(y) \quad \text{ZA VSE } x\in\mathbb{R},$$

~ $$\int_0^\infty g(y)\,dy=\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}=\operatorname{arctg}(y)\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}<\infty.$$

SKLEP: LAHKO SMO ODVAJALI.

OD TU DALJE RAČUNAMO INTEGRAL.

$$F'(x)=\int_0^\infty\frac{dy}{(1+x^2y^2)(1+y^2)}=\ldots$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}\,dy$$

$0<a<b$

IZRAČUNAJ INTEGRAL. POSTOPEK UTEMELJI.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{y}\Big|_{x=b}^{x=a}\,dy = \int_0^\infty \left(\int_b^a -e^{-xy}\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-xy}\,dx\right)dy$$

SEDAJ BI RADI ZAMENJALI VRSTNI RED. PO TEORIJI LAHKO TO STORIMO LE, ČE JE INTEGRAL ENAKOMERNO KONVERGENTEN.

TO POMENI, RABIMO FUNKCIJO $g(y)$, DA BO:

(i) $|e^{-xy}| \leq g(y)$ ZA VSE $x \in (a,b)$

(ii) $\int_0^\infty g(y) < \infty$

$$|e^{-xy}| = e^{-xy} = \frac{1}{e^{xy}} \leq \frac{1}{e^{ay}} = g(y)$$

$$\left.\begin{matrix} x \geq a \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad xy \geq ay$$

$$e^{xy} \geq e^{ay}$$

$$\frac{1}{e^{xy}} \leq \frac{1}{e^{ay}}$$

TA IZBIRA JE DOBRA, SAJ:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{ay}}\,dy = \int_0^\infty e^{-ay}\,dy = \left.\frac{e^{-ay}}{-a}\right|_0^\infty = \frac{1}{a} < \infty .$$

SKLEP: VRSTNI RED SMEMO ZAMENJATI. DOBIMO:

$$I = \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-xy}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left.\frac{e^{-xy}}{-x}\right|_{y=0}^{y=\infty} dx =$$

$$= \int_a^b 0 + \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= \ln b - \ln a$$

$$= \underline{\underline{\ln \frac{b}{a}}}$$

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,dx, \quad a>0$$

IZRAČUNAJ INTEGRAL IN POSTOPEK UTEMELJI. (RAIČ str 58/35)

$$F'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{1+a^2x^2}\cdot 2ax^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\,dx$$

VPRAŠANJE: ALI SMO RES SMELI ODVAJATI?

t.j. ALI JE DOBLJENI INTEGRAL ENAKOM. KONV.?

$$\left|\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\right| = \left|\frac{2ax^2}{1+a^2x^2}\right|\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$\le \frac{2a\cancel{x^2}}{a^2\cancel{x^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{1+x^2} \le \frac{2}{m}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

TO BO RES ZA VSE $a \ge m$ ZA NEK

$m>0$. KER $\frac{2}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{m}\operatorname{arc\,tg} x\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = \frac{2\pi}{m} < \infty$,

JE TO DOBRA MAJORANTA.

SKLEP:

$$F'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\,dx$$

ZA VSE $a \geq m > 0$. KER JE TO RES ZA POLJUBEN $m>0$, JE TO RES ZA VSE $a>0$.

SEDAJ IZRAČUNAMO INTEGRAL.

$$\frac{Ax+B}{(1+a^2x^2)} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}$$

KER JE DESNA STRAN SODA, JE TUDI LEVA. TOREJ STA $A=C=0$. IMAMO:

$$B(1+x^2) + D(1+a^2x^2) = 2ax^2$$

$$(B+D) + x^2(B+a^2D) = 2ax^2$$

$$\left.\begin{aligned} B+D &= 0 \\ B+a^2D &= 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} B &= \frac{2a}{1-a^2} \\ D &= -\frac{2a}{1-a^2} \end{aligned}$$

$$F'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{1-a^2}\left(\frac{1}{1+a^2x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{2a}{1-a^2}\left(\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{a} - \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty} =$$

$$= \frac{2a}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2a}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{a} - \pi\right) = \frac{2\cancel{a}}{1-a^2}\,\frac{\pi(1-a)}{\cancel{a}} =$$

$$= \frac{2\pi}{1+a}$$

TOREJ ZA $a > 0$ VELJA:

$$F'(a) = \frac{2\pi}{1+a}$$

$$F(a) = \int \frac{2\pi}{1+a}\,da = 2\pi \ln(1+a) + C$$

DOLOČIMO ŠE C:

$$\left.\begin{aligned} F(0) &= 2\pi \ln 1 + C = C \\ F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+0\cdot x^2)}{1+x^2}\,dx = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ?\quad C=0$$

ČE JE $F(a)$ ZVEZNA V TOČKI $a=0$, VELJA:

$$F(a) = 2\pi \ln(1+a) \quad \text{ZA } a \geq 0$$

DOKAZ ZVEZNOSTI NA $a \in [-1,1]$:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ a\in[-1,1]}}{\leq} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\ln(1^4+(\sqrt{|x|})^4)}{1+x^2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{NAMIG}}}{\leq} \frac{\ln(1+\sqrt{|x|})^4}{1+x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NAMIG}}}{\leq} \frac{4\cdot\sqrt{|x|}}{1+x^2} = g(x)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\cdot\sqrt{|x|}}{1+x^2}$ OBSTAJA, KER SE V $\pm\infty$ OBNAŠA KOT $x^{-\frac{3}{2}}$.

SKLEP: F JE ZVEZNA V $a=0$ $\Rightarrow$ $F(a) = 2\pi \ln(1+a)$, $a \geq 0$.

OPAZKA:

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,dx \quad \text{SODA}$$

POSLEDICA:

$$F(a) = 2\pi \ln(1+|a|) \quad \text{ZA} \quad a \in \mathbb{R}$$