

Prvi izpit iz Uvoda v diferencialno geometrijo

2. februar 2015

Čas pisanja je 115 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

Sedež (3.04)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Kolo (monocikel) polmera 2 se kotali po grafu funkcije $\cosh$, označenem kot krivulja γ , v ravnini $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Zaradi ukrivljenosti grafa kolo ni postavljeno v navpično lego: v vsaki točki je nagnjeno v smeri normale krivulje γ tako, da je kot med kolesom in navpičnim vektorjem $(0, 0, 1)$ enak ukrivljenosti κ krivulje γ .

- Parametrizirajte pot, ki jo pri kotaljenju opiše središče kolesa.
- Parametrizirajte pot, ki jo pri kotaljenju opiše točka na kolesu, ki je od središča kolesa oddaljena za 1.

2. naloga (25 točk)

Naj bo $a > 0$. Ploskev S je podana s karto

$$\sigma(u, v) = (au, v \cos u, v \sin u), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in (0, 1).$$

- Izračunajte glavne ukrivljenosti in glavne vektorje ploskve S .
- Izračunajte površino ploskve S .

3. naloga (25 točk)

Naj bo γ graf funkcije $f(x) = x + \sin(x) + 2, x \in (0, 2\pi)$. Ploskev S dobimo kot vrtenino tako, da krivuljo γ zavrtimo okoli premice $y = x$. Narišite in kvalitativno opišite vse tipe geodetk na ploskvi S .

4. naloga (25 točk)

Krivulja γ naj bo presek ploskev S_1 in S_2 .

- Dokažite: če je γ geodetka na S_1 in na S_2 , ter je ukrivljenost κ krivulje γ povsod neničelna, potem se S_1 in S_2 vzdolž krivulje γ dotikata (t.j., imata skupno tangentno ravnino). Podajte tudi primer take situacije.
- Naj se S_1 in S_2 v vsaki točki γ sekata pravokotno. Dokažite, da je γ geodetka na S_1 natanko tedaj, ko je N'_2 vzporedna z N_1 . Pri tem je N_i normala ploskve S_i . Namig: začnite s povezavo med γ' in normalama ploskev.