

2. izpit iz Teorije mere

29. maj 2012

1. Naj bosta dani funkciji $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščata zvezi $e^{f(x)} = g(x)$ za vsak $x \in [0, 1]$. Dokaži, da je f Borelovo merljiva natanko takrat, ko je g Borelovo merljiva.

2. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor.

(a) Naj bo μ σ -končna mera. Za $p \geq 1$ skonstruiraj tako merljivo funkcijo f , ki je skoraj povsod večja od 0 in velja $f^p \in L^1(X, \mu)$.

(b) Če obstaja taka funkcija f , ki je skoraj povsod neniščna in $f^p \in L^1(X, \mu)$, dokaži, da je mera μ σ -končna.

3. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor s končno pozitivno mero μ . Naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij iz $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(a) Če zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira enakomerno proti funkciji f , dokaži, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

in $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(b) Ali trditev iz (a) velja tudi v primeru, ko je mera prostora X neskončna?

4. S pomočjo Fubinijevega izreka izpelji naslednjo zvezo

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x} dx = 2 \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$