Teorija mere: 1. izpit

4. 2. 2013

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Sedež (2.02)

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n^2x^2-1}{n^2x+1} e^{-\frac{nx^3+x}{nx}}.$$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-končen merljiv prostor s pozitivno mero in $f \in L^p(X;\mu)$ $(1 \le p < \infty)$ poljubna nenegativna funkcija. Za vsak $t \ge 0$ definirajmo

$$g(t) = \mu(\{x \in X : \ f(x) > t\}).$$

a) (10) Dokaži, da je funkcija g merljiva.

b) (15) Izračunaj integral

$$p\int_0^\infty t^{p-1} g(t)dt.$$

(Nasvet: pomagaj si s Fubinijevim izrekom.)

3. naloga (25 točk)

Naj bo m Lebesgueova mera na intervalu $[0,1]$, opremljenim z Lebesgueovo σ-algebro $\mathcal{L}$. Naj bosta E_1 in E_2 Lebesgueovo merljivi podmnožici intervala $[0,1]$. Definirajmo λ_1 in λ_2 na $\mathcal{L}$ z naslednjima predpisoma.

$$\lambda_1(F) = \alpha m(F \cap E_1) \qquad \text{in} \qquad \lambda_2(F) = \beta m(F \cap E_2), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ F \in \mathcal{L}.$$

a) (5) Dokaži, da sta λ_1 in λ_2 kompleksni meri na $\mathcal{L}$. (Zadostuje dokazati, da je λ_1 kompleksna mera, saj je dokaz v primeru λ_2 povsem enak.)

b) (8) Poišči potreben in zadosten pogoj, da sta meri λ_1 in λ_2 vzajemno singularni.

c) (12) Dokaži, da je mera $\lambda_1 + \lambda_2$ absolutno zvezna glede na mero m in izračunaj

$$\frac{d(\lambda_1+\lambda_2)}{dm}.$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo X neštevna množica in τ toplogija na X, ki vsebuje natanko tiste množice, katerih komplementi so števni in prazno množico.

a) (7) Določi Borelovo σ-algebro B_X generirano s τ. Odgovor dobro utemelji! (Ni potrebno preverjati, da je τ topologija na X.)

b) (18) Določi vse Borelovo merljive funkcije $f : X \to \mathbb{C}$.