

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!



Sedež (3.06)



Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (30 točk)

Naj bo m Lebesgueva mera na realni osi in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ realni števili.

a) Dokaži, da za poljubno Borelovo merljivo množico $A \subseteq \mathbb{R}$

$$m(\lambda A + \mu) = |\lambda| m(A).$$

(Opomba: $\lambda A + \mu = \{\lambda a + \mu : a \in A\}$)

b) Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Izrazi

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda x + \mu) dm(x)$$

z $\int_{\mathbb{R}} f dm$. Odgovor utemelji!

2. naloga (25 točk)

Naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje realnih merljivih funkcij na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Če obstaja integrabilna funkcija $g \in L^1(X)$, da je $f_n \leq g$ za vse $n \in \mathbb{N}$, dokaži, da velja

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

S protiprimerom pokaži, da je predpostavka o obstoju zgornje funkcije g potrebna.

3. naloga (20 točk)

Naj bo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taka zvezno odvedljiva funkcija z

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

in $f' \in L^1(\mathbb{R}, m)$. Naj bo $0 < a < b$. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx.$$

Vse korake dobro utemelji!

4. naloga (25 točk)

Naj bo $X = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ Lebesgueova σ -algebra na X , μ mera štetja točk na $\mathcal{A}$ in m Lebesgueova mera na $\mathcal{A}$.

- a) Ali obstaja Lebesgueova dekompozicija mere μ glede na mero m ?
- b) Ugotovi, ali velja $m \ll \mu$ in ugotovi, ali velja $\mu \ll m$.
- c) Ali obstajata Radon-Nikodymova odvoda $\frac{dm}{d\mu}$ in $\frac{d\mu}{dm}$?