

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 110 točk. Vse odgovore dobro utemelji. Veliko uspeha!

Sedež (3.05)

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj bo $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tako zaporedje množic v $\mathcal{A}$, da za $m \neq n$ velja $\mu(E_n \cap E_m) = 0$. Dokaži, da velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

2. naloga (35 točk)

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzova funkcija.

a) (15 točk) Dokaži, da f preslika množice z ničelno Lebesgueovo mero v množice z ničelno Lebesgueovo mero.

b) (10 točk) Dokaži, da f preslika množice tipa F_σ v množice tipa F_σ .

c) (10 točk) Dodatna naloga: Dokaži, da f preslika Lebesgueovo merljive množice v Lebesgueovo merljive množice.

Nasvet: Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Vsako množico z ničelno Lebesgueovo mero na realni osi lahko pokrijemo s števeno družino odprtih intervalov, katerih vsota dolžin je pod ε .

3. naloga (25 točk)

Naj bo X neprazna množica in $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$ družina merljivih prostorov. Za vsak $i \in I$ naj bo $f_i : X \rightarrow Y_i$ preslikava.

a) (8 točk) Dokaži, da obstaja najmanjša σ -algebra $\mathcal{A}$ na X , da so vse preslikave $f_i : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{B}_i)$ merljive.

b) (5 točk) Če je $\mathcal{B}_i = \sigma(\mathcal{F}_i)$, določi generatorje σ -algebre $\mathcal{A}$.

c) (12 točk) Naj bo $Y = \mathbb{R}$ in $\mathcal{B}$ σ -algebra vseh podmnožic v $\mathbb{R}$, ki so bodisi števne bodisi je njihov komplement števni. Določi najmanjšo σ -algebro $\mathcal{A}$ na $\mathbb{R}$, da je funkcija $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, podana s predpisom $f(x) = x^2$, merljiva. (**Elemente družine $\mathcal{A}$ zapiši eksplicitno**).

4. naloga (25 točk)

Funkciji $F, G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sta podani s predpisoma

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2^n} \frac{dx}{(1+x^t)^n} \quad \text{in} \quad G(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{dx}{(1+x^t)^n}$$

Definirajmo $0^0 := 1$.

- a) **(13 točk)** Izračunaj $F(t)$ in $G(t)$ za vsak $t \in [0, \infty)$.
- b) **(6 točk)** Ali je funkcija F Borelovo merljiva na $[0, \infty)$? Ali je funkcija F zvezna na $[0, \infty)$?
- c) **(6 točk)** Ali obstaja taka funkcija $g \in L^1([0, \infty), m)$, da za vse $x, t \geq 0$ in vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{(1+x^t)^n} \leq g(x)?$$