

- a) Dokaži, da $\mathcal{A}$ σ -algebra na X .
- b) Določi potreben in zadosten pogoj, da je $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.
- c) Naj bo $z \in \mathbb{C}$ poljuben. Poišči primer kompleksne mere μ na $(X, \mathcal{A})$, da velja $\mu(F) = z$, če je $E \subseteq F$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -končen merljiv prostor in $p \in [1, \infty)$.

a) Pokaži, da obstaja strogo pozitivna funkcija $f \in L^p(\mu)$, t.j., obstaja taka nenegativna funkcija $f \in L^p(\mu)$, da je $f(x) > 0$ za vsak $x \in X$.

b) Naj bo $f \in L^p(\mu)$ strogo pozitivna funkcija. Dokaži, da je množica

$$\{g \in L^p(\mu) : \text{obstaja tak } \lambda \geq 0, \text{ da je } |g| \leq \lambda f \text{ skoraj povsod}\}$$

gosta v $L^p(\mu)$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $b > a > 0$. Z uporabo dvojnega integrala izračunaj

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

4. naloga (25 točk)

Naj bosta μ in λ taki pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$, da je $\lambda \ll \mu$. Če je μ σ -končna in λ končna, dokaži, da je Radon-Nikodymov odvod $\frac{d\lambda}{d\mu}$ skoraj povsod nenegativna funkcija glede na katerokoli od mer μ in λ .