

Teorija mere: 1. kolokvij

26. 1. 2015

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 110 točk. Vse odgovore dobro utemelji. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____

										1	
										2	
										3	
										4	
										Σ	

Sedež (3.05)

Vpisna številka

1. naloga (35 točk)

a) (25 točk) Dokaži, da je posplošeni integral $\int_0^1 \frac{x \ln x}{x^3 - 1} dx$ enak

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

b) (10 točk) S pomočjo a) izpelji

$$\frac{29}{100} \leq \int_0^1 \frac{x \ln x}{x^3 - 1} dx \leq \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{54}.$$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow [1, \infty)$ zvezna funkcija.

a) Dokaži, da je funkcija F , definirana s predpisom

$$F(x, y) = (f(y) - f(x))(\ln f(y) - \ln f(x)),$$

nenegativna funkcija na $[0, 1] \times [0, 1]$.

b) Utemelji, da Lebesgueov integral $\int_{[0,1] \times [0,1]} F d(m \times m)$ obstaja in je nenegativno število.

c) Dokaži, da velja $\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \ln f(x) dx \leq \int_0^1 f(x) \ln f(x) dx$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor.

a) Naj bosta λ_1 in λ_2 vzajemno singularni kompleksni meri na $(X, \mathcal{A})$. Dokaži, da je $|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$.

b) Dokaži, da za realno mero λ na $(X, \mathcal{A})$ velja $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in $p \in [1, \infty]$. Dokaži, da je

$$L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu) + L^\infty(\mu).$$

Nasvet: Prostor X razdeli na množico $A = \{x \in X : f(x) \geq 1\}$ in njen komplement.