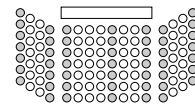


Teorija mere: 3. izpit

10. 9. 2015

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Naj bo X neprazna množica in τ topologija končnih komplementov na X , tj., zaprte množice so natanko končne množice in X .

a) Določi Borelovo σ -algebro, generirano s topologijo τ .

b) V primeru $X = \mathbb{R}$ ugotovi, ali sta funkciji $f(x) = \chi_{[0, \infty)}$ in $g = \chi_{\mathbb{Q}}$ Borelovo merljivi?

2. naloga

Realno os opremimo z Borelovo σ -algebro. Naj bo f taka naraščajoča z leve zvezna funkcija, da za pripadajočo Lebesgue-Stieltjesovo mero μ_f velja

$$\mu_f(A + x) = \mu_f(A)$$

za vse $x \in \mathbb{R}$ in za vse Borelovo merljive množice $A \subseteq \mathbb{R}$. Dokaži, da za vse $x \in \mathbb{R}$ velja

$$f(x) = f(0) + \mu_f([0, x]).$$

Nasvet: Katere so edine translacijsko invariantne Borelove mere?

3. naloga (25 točk)

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s končno mero. Če za zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih funkcij na X velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} d\mu = 0,$$

dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po meri proti 0.

4. naloga (25 točk)

Funkcija $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ je podana s predpisom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dokaži, da je funkcija $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ konveksna funkcija na $(0, \infty)$.

Nasvet: Zapiši $\Gamma(\lambda x + \mu y)$ za $0 < \lambda, \mu < 1$ in $\lambda + \mu = 1$ ter uporabi Hölderjevo neenakost.