

Diskretne strukture 2 – 1. izpit

12. junij 2015

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Naj bo A_5 grupa vseh sodih permutacij množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- a) (5) Koliko elementov ima grupa A_5 ?
- b) (10) Zapiši vse možne rede elementov grupe A_5 in za vsak možen red r podaj predstavnika, ki ima red r .
- c) (5) Zapiši vse elemente reda 2. Ali skupaj z enoto tvorijo grupo?

2. naloga (20 točk)

Vsi polinomi pri tej nalogi so nad obsegom $\mathbb{Z}_2[x]$.

- a) (6) Pokaži, da za poljuben polinom

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

velja

$$(p(x))^2 = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i}.$$

- b) (8) Izračunaj največji skupni delitelj polinomov $x^{10} + x^2$ in $x^{64} + 1$.
- c) (6) Naj bo I najmanjši ideal v $\mathbb{Z}_2[x]$, ki vsebuje polinoma iz prejšnje točke. Zapiši vse neničelne polinome najmanjše stopnje, ki so vsebovani v I .

3. naloga (20 točk)

Naj bo $\text{Cay}(G; S)$ Cayleyjev graf grupe G . Spomnimo se, da so volišča grafa $\text{Cay}(G; S)$ natanko elementi grupe G , poljubno vozlišče v pa ima sosede natanko vozlišča $v \cdot s$ za $s \in S$. Za $x \in G$ definirajmo preslikavo $\varphi_x : V(\text{Cay}(G; S)) \rightarrow V(\text{Cay}(G; S))$,

$$\varphi_x : g \mapsto x \cdot g.$$

- a) (10) Dokaži, da je za vsak $x \in G$ preslikava φ_x avtomorfizem grafa $\text{Cay}(G; S)$.
- b) (10) Dokaži, da je preslikava $\varphi : G \rightarrow \text{aut}(\text{Cay}(G; S))$, podana s predpisom

$$\varphi : x \mapsto \varphi_x,$$

monomorfizem grup.

4. naloga (20 točk)

Fulereni so 3-regularni grafi v ravnini, pri katerih je vsako lice dolžine 5 ali 6.

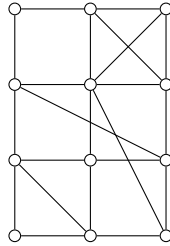
a) (5) Poišči kak fuleren in ga nariši.

b) (15) Naj bo G nek fuleren, naj bo k število lic dolžine 5 v G in naj bo l število lic dolžine 6 v G . Koliko različnih vrednosti lahko zavzame k , če gledamo različne fulerene?

Namig: Izrazi $|V|$, $|E|$ in $|F|$ s k in l ter uporabi Eulerjevo formulo.

5. naloga (20 točk)

Dan je naslednji graf G :



a) (5) Ali ima G eulerjev obhod? Ali ima G eulerjev sprehod?

b) (5) Ali je G hamiltonov? Ali ima G hamiltonovo pot?

c) (5) Ali je G ravninski?

d) (5) Kakšno je kromatično število G ?