

Diskretne strukture 2 – 1. kolokvij

1. april 2015

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Dan je monoid $G = (\mathbb{Z}_{2015}, \cdot)$, kjer je $\cdot$ operacija množenja po modulu 2015.

a) (15) Izračunaj inverz 191 v G ali utemelji, da le-ta ne obstaja.

b) (10) Izračunaj red elementa 191 v grupi G^* .

2. naloga (25 točk)

Iščemo taki grupi G in H , da bo veljalo:

$$\begin{aligned} H &\trianglelefteq G, \\ H &\cong \mathbb{Z}_3, \\ G/H &\cong \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

a) (10) Poišči tak primer grup G in H , da bo G abelova.

b) (15) Poišči tak primer grup G in H , da G ne bo abelova.

3. naloga (30 točk)

Pokaži naslednji trditvi.

a) (15) G je komutativna $\iff G/Z(G)$ je ciklična.

Namig za $\Leftarrow$: Pokaži, da obstaja element $a \in G$, tako da lahko vsak element G zapišemo kot $a^i z$ za nek $i \in \mathbb{Z}$ in $z \in Z(G)$.

b) (15) Naj bosta p in q praštevili. Pokaži, da je vsaka grupa moči pq , ki ima netrivialen center, komutativna.

4. naloga (20 točk)

Naj bo na ravnini narisani pravilni 10-kotnik. Označimo z r rotacijo za 36° v pozitivni smeri okoli središča 10-kotnika, z z zrcaljenje čez glavno diagonalo 10-kotnika in z D_{10} grupo $\langle r, z \rangle$.

a) (5) Na vajah smo pokazali, da lahko vsako zrcaljenje, ki ohranja 10-kotnik, zapišemo v obliki $r^i z$ za nek $i \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$. Kako bi v tej obliki zapisal zrcaljenje zr^3 ?

b) (15) Izračunaj $C_{D_{10}}(z)$, t. j. centralizator elementa z v grupi D_{10} . Kateri znani grupi je izomorfen?