

1. izpit iz DISKRETNIH STRUKTUR 2 (IŠRM)

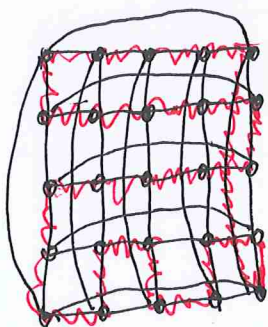
17. junij 2016

Priimek in ime: _____

Vpisna št.: _____ Vrsta: _____ Kolona: _____

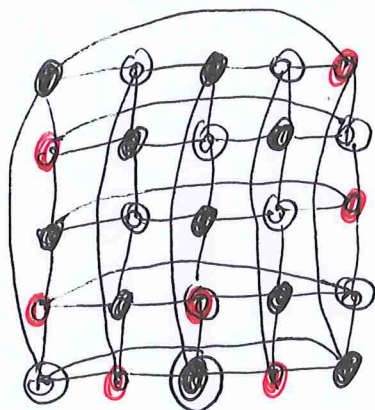
1. ($5 + 10 + 10 = 25$ točk) Za graf $C_5 \square C_5$ določite naslednje lastnosti:

(a) Ali je hamiltonov?



$C_5 \square C_5$ ima hamiltonov cikel
(označen z rdečo barvo)
 $\Rightarrow$ je hamiltonov.

(b) Kolikšno je njegovo kromatično število?



(c) Ali je ^{bela} ravninski?

Graf ima 25 vršič,
 $\frac{25 \cdot 4}{2} = 50$ povezav
in ožimo 4^{18}
(mimo + u krt milu)

$\chi(C_5 \square C_5) \geq 3$, saj
vsebuje C_5 kot podgraf.

Ker $C_5 \square C_5$ lahko prebarvamo
s temi barvami (glej sliko
levo), je $\chi(C_5 \square C_5) \leq 3$

Torej je $\chi(C_5 \square C_5) = 3$

Za ravninski graf

$$\text{velja } m \leq \frac{g(n-2)}{g-2}$$

z naš graf:

$$50 \leq \frac{4 \cdot 23}{2} = 46$$

Ne velja! Torej $C_5 \square C_5$ ni ravn.

Lahko bi v $C_5 \square C_5$ priskeli $K_{3,3}$ kot minor.

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.

2. (20 točk) Za graf na osmih vozliščih so po vrsti podane stopnje sedmih vozlišč 7, 6, 4, 3, 2, 2, 2, osmo vozlišče pa ima stopnjo d . Za katere $d \geq 0$ obstaja graf s takšnimi stopnjami vozlišč? Za vsako od možnosti poiščite kak graf s takšnim zaporedjem stopenj!

- Graf na osmih vozliščih ima lahko vozlišče stopnje največ 7 $\Rightarrow d \leq 7$

- Ker je št. vozlišč iste stopnje vedno sodo, je d sodo število.

- Ker ima graf vozlišče stopnje 7, ne more imeti vozlišča stopnje 0 (ker je vozlišče stopnje 7 povezano z vsemi ostalimi vozlišči).

Ostanejo tri možnosti, ki jih preverimo s pomočjo izreka iz vj.

$d=6$:

$d=2, 4, 6$

7, 6, 6, 4, 3, 2, 2, 2
5 5 3 2 1 1 1
4 2 1 0 0 1
4 2 1 1 0 0
1 0 0 -1 0
 $\rightarrow \infty$

$d \neq 6$

$d=4$: 7 6 4 4 3 2 2 2
✓ 5 3 3 2 1 1 1
2 2 1 0 0 1
2 2 1 1 0 0
1 0 1 0 0

Ta graf obstaja!

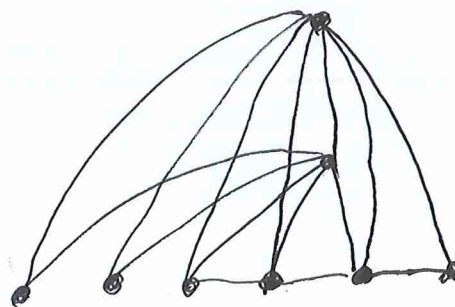
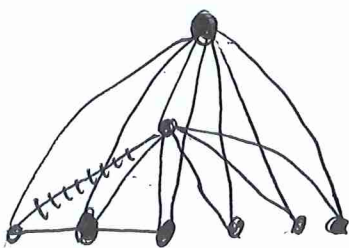
Ta graf obstaja tudi graf s stopnjami 7 6 4 4 3 2 2, ne primer:

$d=2$

7 6 4 3 2 2 2 2
5 3 2 1 1 1 1
2 1 0 0 0 1
2 1 1 0 0 0

Ta graf obstaja!

No primer:



3. $(5 + 5 + 6 + 6 + 8 = 30 \text{ točk})$ Dokažite ali ovržite.

(a) Grupa S_7 vsebuje element reda 10.

To je res, na primer: $(1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6\ 7)$
 ima red $\text{lcm}(2, 5) = 10$

(b) Grupa S_7 vsebuje element reda 9.

Ne vsebuje. Element reda 9 bi moral imeti cikel dolžine 9, v S_7 pa je dolžina največjega cikla največ 7.

(c) Grupa S_7 vsebuje podgrupo moči 10.

To je res, na primer $\langle (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6\ 7) \rangle$

(d) Grupa S_7 vsebuje podgrupo moči 9.

To je res, na primer $\langle (1\ 2\ 3), (4\ 5\ 6) \rangle =$
 $\{ \text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (4\ 5\ 6), (4\ 6\ 5),$
 $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6), (1\ 2\ 3)(4\ 6\ 5), (1\ 3\ 2)(4\ 5\ 6), (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5) \}$

(e) Množica $H = \{ \pi \in S_7; (1\ 2)\pi = \pi(1\ 2) \}$ je podgrupa grupe S_7 .

To je res. Vzemimo $\pi, \tau \in H$:

$$\pi^{-1}\tau \in H;$$

$$\underbrace{(1\ 2)}_{\pi^{-1} \in H} \underbrace{\pi^{-1}\tau}_{\tau \in H} = \pi^{-1}(1\ 2)\tau = \pi^{-1}\tau(1\ 2)$$

$$\begin{aligned} (1\ 2)\pi &= \pi(1\ 2) \\ (1\ 2)\tau &= \tau(1\ 2) \end{aligned}$$

→ pomnožimo s π^{-1} z leve in desne!
 $\pi^{-1}(1\ 2) = (1\ 2)\pi^{-1}$
 $\Rightarrow \pi^{-1} \in H$

$\Rightarrow \pi^{-1}\tau \in H$, H je podgrupa S_7

4. (6 + 6 + 6 + 7 = 25 točk)

(a) Pokažite, da je množica matrik

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

z operacijo seštevanja matrik grupa.

(b) Pokažite, da je preslikava

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$$

homomorfizem grup $(M, +)$ in $(\mathbb{R}, +)$. Poiščite jedro homomorfizma f . Kateri znani grupi je izomorfná grupa $M/\text{Ker}(f)$?

a) 1. Zaprtaost: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in M, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in M$ ✓

2. Asociativnost: sešt. matrik je asociativno

Tu velja zato, ker seštevamo po komponentah, običajno sešt. pa je asociativno.

3. 1. enota: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ in $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

4. 1. inverz: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M \Rightarrow \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \in M$ in

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) 1. ~~homomorfizem~~
enota v $(M, +)$ je $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, enota v $(\mathbb{R}, +)$ je 0

Res velja $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$

$$\begin{aligned} &= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) = a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \\ &= a_1 + d_1 + a_2 + d_2 = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Jedro: $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d = 0 \quad \text{Ker } f = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Ker je f surj. preslikava, je m. izreči o izomorfizmu

$$M/\text{Ker } f \cong (\mathbb{R}, +), \quad a \in \mathbb{R}: \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto a$$