

2. izpit iz DISKRETNIH STRUKTUR 2 (IŠRM)

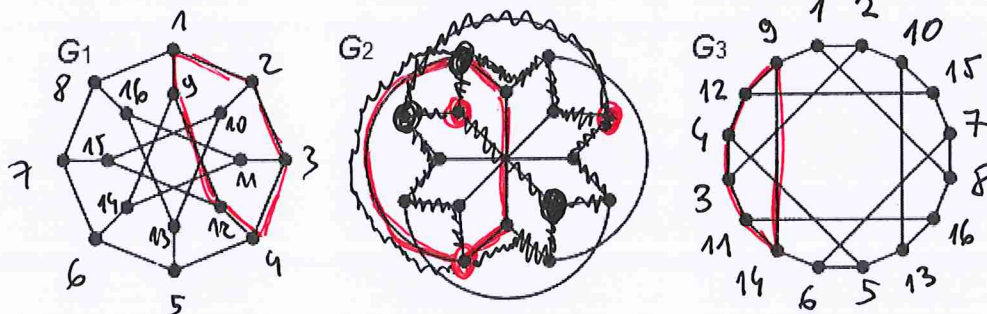
5. julij 2016

SKICA REŠITEV

Priimek in ime: _____

Vpisna št.: _____ Vrsta: _____ Kolona: _____

1. (25 točk) Kateri od grafov na spodnji sliki so izomorfní? Za vsakega od njih ugotovite še, ali je ravninski.



Dobimo najmanjši cikel v G_1 in G_3 je 6, v G_2 pa 4

$\Rightarrow G_2$ ni izomorfen niti G_1 niti G_3 (Oznočeno z točkami bener)

G_1 in G_3 sta izomorfna: izomorfizem $i \rightarrow i$

Ni težko preveriti, če greva tudi preveriti v preveriti

črta 1 2 3 4 5 6 7 8 $\rightarrow$ 1 2 3 4 5 6 7 8

črta 9 12 15 10 13 16 11 14 $\rightarrow$ 9 12 15 10 13 16 11 14

preveri $i, i+8 \rightarrow i, i+8$
(preveriti)

} vse preveriti

G_1 ni ravninski (zato tudi G_3 ni ravninski)

To vidimo iz formule $m \leq \frac{g(n-2)}{g-2}$, ki velja za ravn. grafe

$$m = \frac{16 \cdot 3}{2} = 24$$

$$24 \not\leq \frac{6(16-2)}{4} = 21$$

G_2 ima očito 4, tu moramo pomisliti na formulo ne da protislovje. Priskoti je tudi subd. $K_{3,3}$

(Oznočeno črta, priskoti noliča in črta)

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.

2. (25 točk) Naj bo G povezan ravninski graf s 6 vozlišči in 11 povezavami.

(a) Pokažite, da je $\chi(G) \geq 3$.

(b) Koliko največ in koliko najmanj je lahko $\chi'(G)$?

(c) Ali je G vedno Hamiltonov?

a) Dvoleden graf ne 6 vozliščih ima največ 9 povezav
(polni dvoledni grafi ne 6 vozliščih so $K_{3,3}$, $K_{4,2}$ in $K_{5,1}$
ki imajo 9, 8 in 5 povezav).

Ker ima G 11 povezav ne more biti dvoleden

$$\Rightarrow \chi(G) \geq 3$$

b) G ni dvoleden $\Rightarrow \chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\}$ izrečen ^{po Vizingovem}

Koliko največ je lahko $\Delta(G)$: 5, ker ima G samo 6 voz.

Koliko najmanj je lahko $\Delta(G)$: najmanj 4;

ker ima G 11 povezav, je povprečna stopnja

$$\text{enaka } \frac{11 \cdot 2}{6} = \frac{11}{3} > 3, \text{ torej ima } G \text{ vsaj eno}$$

vozlišče stopnje 4.

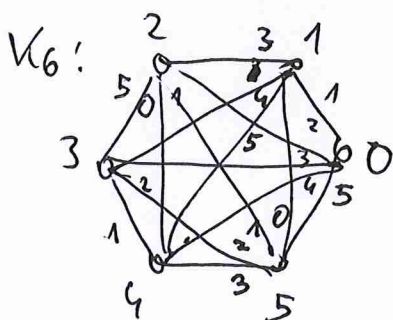
Torej: $4 \leq \chi'(G) \leq 5$

Izreče si, da G ni možno, saj lahko že

K_6 pobarvamo s 5 barvami, posledično

tudi vsaj njegov podgraf.

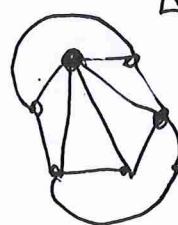
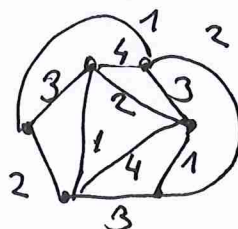
rem.



Obstajajo tudi grafi s
kromatičnim indeksom 4 in 5

$$\Rightarrow \chi'(G) \in \{4, 5\}$$

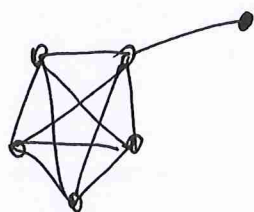
G_2 :



$$\begin{aligned} \Delta(G_1) &= 5 \\ \chi'(G_1) &\geq 5 \\ G_1 &< K_6 \\ \chi'(G_1) &\leq 5 \end{aligned}$$

ki pobarvamo z 4 in 5 (mod 6)

c) če izpustimo prep. o ravninskih, hitro najdemo graf, ki ni Hamiltonov,



sej imo vsliče stopnje 1.

Če je graf ravninski po je vedno Hamiltonov. To je nekoliko težje dokazati.

Ločimo več primerov. Opazimo, da je $\delta(v) \geq 2$ (celi graf stopnje vsaj 2 je možni)

1. Vse vsliče stopnje vsaj 3 :

potem je Ham. po Diracovem izreku.

2. Imamo vsliče stopnje 2, ostale

stopnje 4 : potem je Ham. po

Orejevem izreku

3. 5 4 4 4 3 2 $\leadsto$ v tem grafu so vse vsliče vsaj 2 vsliče stopnje 5, vse vsliče st. 4 so sosednje med seboj.

Najdemo Ham. cikel 2 5 3 4 4 4

4. Dve vsliči st. 2 ^{ali več} isto možni,

zoprednje ni preprosto (preverimo)

5 5 4 4 2 2

5 5 5 3 2 2

3. (10 + 10 = 20 točk) Pokażite, da je množica matrik

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

$$a^2 + b^2 = \det \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Vano:

$$\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$$

z operacijo množenja matrik grupa. Pokażite še, da je izomorfna grupi $(\mathbb{C}, \cdot)$.

a) ^{1. zaporedje} $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$
 $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_x, \underbrace{a_1 b_2 + b_1 a_2}_y \\ \underbrace{-b_1 a_2 - a_1 b_2}_{-y}, \underbrace{-b_1 b_2 + a_1 a_2}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

~~mimo~~ Velja tudi: $x^2 + y^2 \neq 0$ (če $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0 \Rightarrow \det AB \neq 0$)

$$\Rightarrow A_1 \cdot A_2 \in M$$

2. asociativnost: množenje matrik je asociativno ✓

3. enota $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je enota za množenje matrik, $I \in M$ ✓

4. Inverz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ($a=1, b=0, a^2+b^2 \neq 0$)

tudi $A^{-1} \in M$ ✓ ($\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \neq 0$)

b) $f: M \rightarrow \mathbb{C}$

$$f: \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow a + ib$$

= f je bijektivno: -inj $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$
 -surj $x + iy$ je slike $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$

= homomorfizem: (ker bij. matrike potrebuje $f: I \rightarrow 1$)

$$f(A_1 \cdot A_2) = \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_{\text{glj. to } a} + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad \parallel \quad \checkmark$$

$$f(A_1) \cdot f(A_2) = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

4. (15 + 15 = 30 točk)

- (a) Naj bo G podgrupa grupe S_7 , generirana s permutacijama $\pi = (1\ 2\ 3\ 4)$ in $\sigma = (5\ 6\ 7)$. Koliko elementov ima grupa G ? Ali je komutativna? Kateri znani grupi je izomorfna? V G poiščite podgrupo indeksa 2.
- (b) Naj bo G taka podgrupa simetrične grupe S_n , da vsebuje neko liho permutacijo. Pokažite, da v G obstaja podgrupa edinka indeksa 2.

a) π in σ imata disjunktno podporo, zato komutirata. Zato komutirajo tudi vse njune potence.

Polg. element grupe G je oblike $\pi^i \sigma^j$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, ker imajo π red 4, σ pa red 3.

Grupa G ima ~~at~~ dvanaest elementov in kot smo že ugotovili, je komutativna.

$$\text{Vedno } G = \langle \pi \rangle \times \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{12}$$

(to je v bistvu edina kom. grupa moči 12)

Podgrupe indeksa 2 imajo $\frac{12}{2} = 6$ elementov ^{odlup} ^{u'elcup} _{podgrupa $\mathbb{Z}_{12}$}

Generirana je npr. z elementom

$$\pi^2 \sigma = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6\ 7), \text{ ki ima red 6.}$$

b) Telo podgrupe je $H = \{\pi \in G \mid \pi \text{ soda perm.}\}$

To vidimo na primer tega, kot ste to pokazali

z0 Am.

$\text{sign } G \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$ ^{surjektiven} je homomorfizem

$$\text{Ker sign} = H$$

Po izreku o homomorfizmu je $H \trianglelefteq G$

$$\text{in } G/H \cong \mathbb{Z}_2, \text{ kjer je } [G:H] = 2$$

$|G/H| = 2$