

3. izpit iz DISKRETNIH STRUKTUR 2 (IŠRM)

31. avgust 2017

Priimek in ime: _____

Vpisna št.: _____ Vrsta: _____ Kolona: _____

1. Za katere $n \geq 5$ je graf $\overline{C}_n$ ravninski?

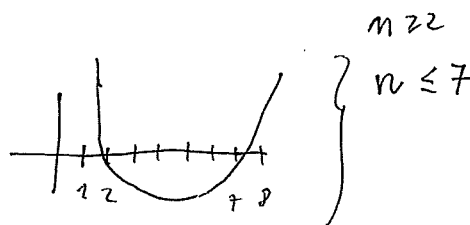
$\overline{C}_n$ je ravninski, mora veljati $|E(\overline{C}_n)| \leq 3n - 6$

$$\frac{n(n-3)}{2} \leq 3n - 6$$

$$\Rightarrow n^2 - 9n + 12 \leq 0$$

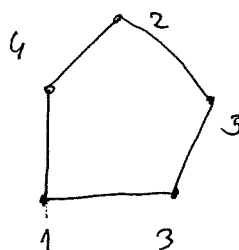
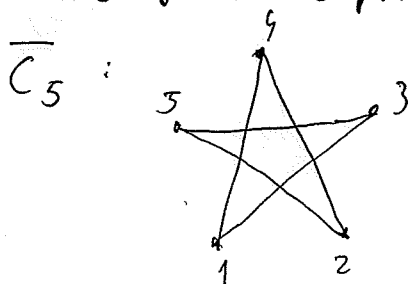
Niži: $n^2 - 9n + 12 = 0$ Aa

$$n_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 48}}{2} \quad n_1 = 7,37 \quad n_2 = 1,63$$



Torej za $n \geq 8$ graf $\overline{C}_n$ ni ravninski.

Posebej je treba preveriti za $n = 5, 6, 7$

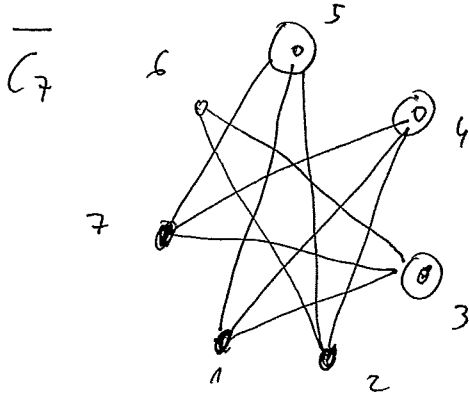
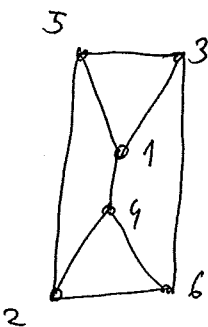
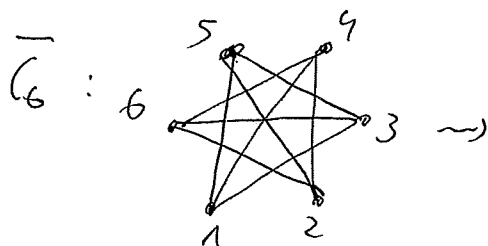


Graf $\overline{C}_5$ in $\overline{C}_6$ smo

v ravnini

neiseli torej,

torej so $\overline{C}_5$ in $\overline{C}_6$ ravninski.



$\overline{C}_7$ ni ravninski, saj

velja delitev $K_{3,3}$

(moški so nerisane

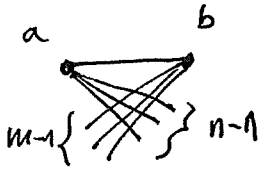
samo te prezoze; velja

$K_{3,3}$ so 1,2,7 (črna) in 3,4,5 (bela).

2. (a) Koliko vozlišč in koliko povezav ima graf $L(K_{m,n})$?
 (b) Za katere m, n je graf $L(K_{m,n})$ Eulerjev?
 (c) Pokažite, da sta grafa $L(K_{m,n})$ in $K_m \square K_n$ izomorfna.

a)

Graf $K_{m,n}$ ima $m \cdot n$ povezav $\Rightarrow |E(L(K_{m,n}))| = m \cdot n$



Vseke povezave v $K_{m,n}$ imo skupno
 krajščice z $(m-1) + (n-1)$ povezanimi.

$\Rightarrow$ Stopnje vozlišč v $L(K_{m,n})$ so $m+n-2$

Lemo o robaenju: $|E(L(K_{m,n}))| = \frac{m \cdot n \cdot (m+n-2)}{2}$

b) Stopnje vozlišč v $L(K_{m,n})$ so $m+n-2$.

$m+n-2$ je sodi $\Leftrightarrow m, n$ obe sode ali
 m, n obe lihi

Ker je $K_{m,n}$ povezan, je povezan tudi $L(K_{m,n})$

Torej je $L(K_{m,n})$ ^{Eulerjev} ~~povezan~~ neeuler tedaj,

ko imata m in n isto parnost

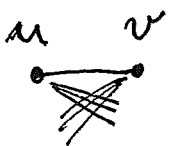
(Graf je Eulerjev $\Leftrightarrow$ povezan in imajo vse vozlišča sode stopnje)

c) $G_1 = K_m \square K_n$: $V(G_1) = \{(u, v); u \in [m], v \in [n]\}$

$(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2) \Leftrightarrow u_1 = u_2$ in $v_1 \sim v_2$ v K_n
 ali
 $u_1 \sim u_2$ v K_m in $v_1 = v_2$

$\Leftrightarrow u_1 = u_2$ ali $v_1 = v_2$

$G_2 = L(K_{m,n})$ $V(G_2) = \{(u, v); u \in [m], v \in [n]\}$



$(u, v) \sim (u, v_i), i=1, \dots, n$ $v \neq v_i$

$(u_i, v), i=1, \dots, m$ $u \neq u_i$

Grafo sta enaka! Izomorfizem $V(G_1) \rightarrow V(G_2)$
 $(u, v) \mapsto (u, v)$

3. Koliko elementov ima grupa $\mathbb{Z}_{28}^*$? Naj bo H ciklična podgrupa grupe $\mathbb{Z}_{28}^*$, generirana z elementom 9. Zapišite elemente podgrupe H in poiščite desne odseke podgrupe G po podgrupi H . Kateri znani grupi je izomorfná grupa $\mathbb{Z}_{28}^*/H$?

$$|\mathbb{Z}_{28}^*| = \varphi(28) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$(\mathbb{Z}_{28}^* = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27\})$$

$\mathbb{Z}_{28}^*$ ima 12 elementov.

$$9^2 = 81 \equiv 25 \pmod{28}$$

$$9^3 \equiv 9 \cdot 25 \equiv 1 \pmod{28}$$

$$H = \{1, 9, 25\}$$

$$H \cdot 3 = \{3, 27, 19\}$$

$$H \cdot 5 = \{5, 17, 13\}$$

$$H \cdot 11 = \{11, 15, 23\}$$

$$\mathbb{Z}_{28}^*/H = \{H, H \cdot 3, H \cdot 5, H \cdot 11\}$$

Grupe imo 4 elemente.

Kolik je izomorfná

$$\mathbb{Z}_4 \text{ ali } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Preverimo red elementov:

$$H \cdot 3 \cdot H \cdot 3 = H \cdot 9 = H$$

$$H \cdot 5 \cdot H \cdot 5 = H \cdot 25 = H$$

$$H \cdot 11 \cdot H \cdot 11 = H \cdot 9 = H$$

imamo 3 elemente

reda 2

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_{28}^*/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$11 \cdot 11 = 121 \equiv 9 \pmod{28}$$

4. Naj bo G grupa in H, K njeni podgrupi. Definirajmo množico HK kot

$$HK = \{hk; h \in H \text{ in } k \in K\}.$$

Dokažite ali ovržite.

(a) HK je podgrupa grupe G .

(b) Če je G komutativna, je HK podgrupa grupe G .

a) ne velja. Protiprimer: $H = \{id, (12)\}$
 $K = \{id, (13)\}$
 $G = S_3$

$$HK = \{id, (12), (13), (12)(13) = (123)\}$$

HK ni podgrupa G , saj ne vsebuje $(123)(123) = (132)$.

b) velja. Dokažimo:

— Zaprta za operacijo:

Vzemimo $a_1 = h_1 \cdot k_1$, $a_2 = h_2 \cdot k_2$ iz HK ; $h_1, h_2 \in H$
 $k_1, k_2 \in K$

$$a_1 \cdot a_2 = h_1 \cdot k_1 \cdot h_2 \cdot k_2 = \underbrace{h_1 \cdot h_2}_{\in H} \cdot \underbrace{k_1 \cdot k_2}_{\in K} \in HK \quad \checkmark$$

— HK vsebuje enoto, saj $e \in H$, $e \in K \Rightarrow e \cdot e = e \in HK$
 $e \in G$

— Inverz: $a = hk \in HK$, kjer $h \in H$, $k \in K$

$a^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in G$, saj $hk \cdot k^{-1}h^{-1} = e$ in

$$k^{-1}h^{-1}hk = e$$

$$a^{-1} = \cancel{h^{-1}k^{-1}} k^{-1} \cdot h^{-1} \xrightarrow{\text{kom.}} h^{-1} \cdot k^{-1} \in HK$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $h \in H$ $k \in K$
 podgrupa podgrupa

✓