

2. kolokvij iz DISKRETNIH STRUKTUR 2 (IŠRM)

8. junij 2016

REŠITVE

Priimek in ime: _____

Vpisna št.: _____ Vrsta: _____ Kolona: _____

1. (20 točk) Na množici $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ je dana operacija $*$ s predpisom $x * y = x + y + xy$. Pokažite, da je $(A, *)$ grupa.

1. Zaprtost za operacijo

$$x, y \in A \Rightarrow x \neq -1, y \neq -1 \quad \text{vendar} \quad x * y \in \mathbb{R}$$

Ali se lahko zgodi: $x * y = -1$?

$$x * y = x + y + xy = -1$$

$$x(1+y) = -1-y$$

$$x = -\frac{(1+y)}{(1+y)} = -1$$

(delimo lahko ker $y \neq -1$)

$\Rightarrow$

2. Asociativnost

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y + xy) * z = x + y + xy + z + (x + y + xy) \cdot z \\ &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) = x + (y * z) \end{aligned}$$

3. Enota je 0

$$x * 0 = x + 0 + x \cdot 0 = x$$

$$0 * x = 0 + x + 0 \cdot x = x$$

$0 \in A$

$$\left(\begin{array}{l} x * e = x + e + xe = x \\ e(1+x) = 0 \\ e = 0, \text{ ker } x \neq -1 \end{array} \right)$$

4. Inverz

Ali $\exists y \in A: x * y = y * x = 0$?

(Zaradi komutativnosti dovolj preveriti $x * y = 0$)

$$x * y = x + y + xy = 0$$

$$y(1+x) = -x$$

$$y = -\frac{x}{1+x}$$

$y \in \mathbb{R}$, ker $x \neq -1$

se lahko zgodi: $y = -1$?

$$-\frac{x}{1+x} = -1 \Rightarrow -x = -1 - x$$

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič. $0 = -1$

$\Rightarrow y \in A$

2. ($5+6+5+6+5+8+5=40$ točk) Dokažite ali ovržite.

(a) Poljubna končna grupa vsebuje element reda 3. NI RES

Vemo: Med elemente deli moč grupe

$G = \mathbb{Z}_4$ ima moč 4 $\Rightarrow$ ni noben elementar
reda 3

(b) Poljubna grupa vsebuje sodo število elementov reda 3. JE RES

Naj bo G grupa

1) G ne vsebuje el. reda 3 $\checkmark$ (0 je sodo št.)

2) $a \in G$ element reda 3

$\Rightarrow a^2 = a^{-1}$ tudi element reda 3 ($a^2 = a^{-1}$)

Za vsak el. reda 3 je tudi njegov inverz reda 3
 $\Rightarrow G$ ima sodo št. el. reda 3

(c) Poljubna grupa ima sodo število podgrup moči 3. NI RES

S_3 ima dve elementa reda 3 in
zato samo eno podgrupo moči 3:

$$\{id, (123), (132)\}$$

S_3 ima eno št. podgrupo moči 3.

(d) Če ima grupa samo eno podgrupo moči 3, potem je le-ta podgrupa edinka. JE RES

Vemo: $H \leq G \Rightarrow aHa^{-1} \cong H \quad \forall a \in G$

Ker je $aHa^{-1} \cong H \quad \forall a \in G$,

G ne ima samo eno podgrupo moči 3,

je $aHa^{-1} = H \quad \forall a \in G$

$\Rightarrow H \trianglelefteq G$.

- (e) Naj bosta a in b elementa končne grupe G z redoma s oziroma t . Potem je red elementa ab enak $\text{lcm}(s, t)$.

Ni res

Ni res. Vzemimo grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$

$$2 \in \mathbb{Z}_4, \text{red}(2) = 2$$

$$\text{red}(2+2) = \text{red}(0) = 1 \quad //$$

- (f) Naj bosta G_1 in G_2 grupi. Potem je $Z(G_1) \times Z(G_2) = Z(G_1 \times G_2)$.

Ni res

$$\textcircled{1} \quad \underline{Z(G_1) \times Z(G_2)} \subseteq \underline{Z(G_1 \times G_2)}$$

$$a \in Z(G_1), b \in Z(G_2), (x, y) \in G_1 \times G_2 \text{ polj.}$$

$$(a, b) \oplus (x, y) = (ax, by) \stackrel{a \in Z(G_1)}{=} (xa, by) =$$

$$= (x, y) \oplus (a, b)$$

Torej el. (a, b) komutira z vsakim elementom $G_1 \times G_2 \Rightarrow (a, b) \in Z(G_1 \times G_2)$

$$\textcircled{2} \quad \underline{Z(G_1 \times G_2)} \subseteq \underline{Z(G_1) \times Z(G_2)}$$

$$(a, b) \in Z(G_1 \times G_2), x \in G_1, y \in G_2 \text{ poljubne}$$

$$(a, b) \oplus (x, y) = (x, y) \oplus (a, b) \text{ ker } (a, b) \in Z(G_1 \times G_2)$$

$$(ax, by) = (xa, yb) \Rightarrow ax = xa, by = yb$$

(g) Grupe $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{21}, \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{15}$ in $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{35}$ so izomorfne.

Prej s predenaj:

$$a \perp b \Rightarrow \mathbb{Z}_{ab} \cong \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$$

$$\text{Ker velja } 10 \perp 21 \Rightarrow \mathbb{Z}_{210} \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{21}$$

$$14 \perp 15 \Rightarrow \mathbb{Z}_{210} \cong \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{15}$$

$$6 \perp 35 \Rightarrow \mathbb{Z}_{210} \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{35}$$

Vse grupe so med izomorfne.

Trahitov drugi.

3. (20 točk) Poiščite eno ciklično podgrupo moči 4 grupe S_4 . Ali je podgrupa edinka?

$$H = \{ \text{id}, (1234), (13)(24), (1432) \}$$

je (ciklična) podgrupa moči 4 grupe S_4 .

~~Preverimo~~ Preverimo odseke aH in Ha

$$\text{za } a = (123)$$

$$\begin{aligned} aH &= \{ (123), (123)(1234), (123)(13)(24), (123)(1432) \} \\ &= \{ (123), (1324), (142)(3), (1)(2)(34) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ha &= \{ (123), (1234)(123), (13)(24)(123), (1432)(123) \} \\ &= \{ (123), (1342), (1)(243), (14)(2)(3) \} \end{aligned}$$

Odseki aH in Ha nista enaka

$\Rightarrow$ H ni podgrupa edinke grupe S_4

(sej ^{je} bil ~~20~~ več $a \in S_4$ moreh veljati.

$$aH = Ha)$$

Se hitreje se po definiciji:

H podgrupa edinke $\Leftrightarrow H = aHa^{-1} \quad \forall a \in G$

$$(12) \in G, (13)(24) \in H$$

$$(12)(13)(24)(12) = (14)(23) \notin H$$

Torej $H \neq aHa^{-1}$, H ni podgrupa edinke

4. (20 točk) Koliko elementov ima grupa $\mathbb{Z}_{21}^*$? Pokažite, da je preslikava $f: \mathbb{Z}_{21}^* \rightarrow \mathbb{Z}_{21}^*$ podana s predpisom

$$f(x) = x^3 \bmod 21$$

homomorfizem grup. Poiščite še jedro in sliko homomorfizma f . Katerima znanima grupama sta izomorfna?

2 $|\mathbb{Z}_{21}^*| = \varphi(21) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$

2 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \in \mathbb{Z}_{21}^* \text{ je enota} \\ f(1) = 1^3 \bmod 21 = 1 \quad \checkmark \end{array} \right.$

5 $\left\{ \begin{array}{l} f(ab) = (ab)^3 \bmod 21 = a^3 b^3 \bmod 21 \\ \quad (= a^3 \cdot b^3) \\ = f(a) \cdot f(b) \\ \Rightarrow f \text{ je homomorfizem} \end{array} \right.$

2 $\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{Z}_{21}^* ; x^3 = 1\} = \{1, 4, 16\}$

$$\cong \mathbb{Z}_3$$

(samo ene grupe mori do izm.)

izračunajmo
mapi huf

$$\text{Im } f = \{x^3 \bmod 21 ; x \in \mathbb{Z}_{21}^*\}$$

3

	1^3	2^3	4^3	5^3	8^3	10^3	11^3	13^3	16^3	17^3	19^3	20^3
	1	8	16	8	13	8	13	1	20	13	20	

2 $\text{Im } f = \{1, 8, 13, 20\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$8 \cdot 8 = 64 \equiv 1 \pmod{21}$$

$$13 \cdot 13 = 169 \equiv 1 \pmod{21}$$

$$20 \cdot 20 \equiv (-1) \cdot (-1) = 1 \pmod{21}$$

noben el. nimp

udog $\Rightarrow$

grupe je lahko

samo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$