

RESITVE

2. kolokvij iz DISKRETNIH STRUKTUR 2 (IŠRM)

13. junij 2017

1. Naj bo $(G, \circ)$ grupa in $a \in G$. Na množici G definiramo novo operacijo $*$ s predpisom $x * y = x \circ a \circ y$ za $x, y \in G$.
 - (a) Pokažite, da je tudi struktura $(G, *)$ grupa.
 - (b) Ali je grupa $(G, *)$ izomorfna grupi $(G, \circ)$?

4. Koliko elementov ima grupa $G = \mathbb{Z}_{25}^*$?
 - (a) Poiščite najmanjšo podgrupo H grupe G , ki vsebuje element 6.
 - (b) Pokažite, da je H podgrupa edinka.
 - (b) Zapišite desne odseke grupe G po podgrupi H .
 - (c) Kateri znani grupi je izomorfna grupa G/H ?

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti!

1. izpit iz DISKRETNIH STRUKTUR 2 (IŠRM)

13. junij 2017

1. Poiščite Hamiltonov graf na osmih vozliščih, ki je izomorfen svojemu komplementu. Opišite, kako ste takšen graf našli. Poiščite tudi izomorfizem med grafom in njegovim komplementom.

4. Pokažite, da ima 4-regularen ravninski graf vsaj en trikotnik.

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti!

KOLOKVIJ, NALOGA 1

a) $(G, *)$ je grupa: 15

- Zaprtaost: $x, y \in G$

$$x * y = x \circ a \circ y \in G, \text{ ker } x, a, y \in G \text{ in } G \text{ grupe}$$

- asociativnost

$$(x * y) * z = (x \circ a \circ y) * z = (x \circ a \circ y) \circ a \circ z \\ = x \circ a \circ (y \circ a \circ z) = x * (y * z)$$

$(G, \circ)$ asoc.

- enota: $e = a^{-1}$ (inverz a v grupi G)

$$x * a^{-1} = x \circ a \circ a^{-1} = x$$

$$a^{-1} * x = a^{-1} \circ a \circ x = x$$

- Inverz $x \in G$

$$x * y = a^{-1}$$

$$x \circ a \circ y = a^{-1}$$

$$a \circ y = x^{-1} \circ a^{-1}$$

$$y = a^{-1} \circ x^{-1} \circ a^{-1} \in G$$

Inverz el. x v $(G, *)$ je $a^{-1} \circ x^{-1} \circ a^{-1}$

Torej velja: $x * y = e^{-1}$

Premisimo še

$$\underline{y * x = e^{-1}}$$

$$y * x = a^{-1} \circ x^{-1} \circ a^{-1} \circ a \circ x \\ = a^{-1} \quad \checkmark$$

b) 10

Definirajmo $f: (G, \circ) \rightarrow (G, *)$

$$f: x \mapsto a^{-1} \circ x$$

f je inj: $x, y \in G, f(x) = f(y) \rightarrow a^{-1} \circ x = a^{-1} \circ y \Rightarrow x = y$ $\checkmark$

f je surj: izberemo $y \in G: f(a \circ y) = a^{-1} \circ a \circ y = y$ $\checkmark$

f je homomorfizem: $f(x \circ y) = a^{-1} \circ x \circ y$

$$f(x) * f(y) = (a^{-1} \circ x) \circ a \circ (a^{-1} \circ y)$$

$$\Rightarrow f(x \circ y) = f(x) * f(y) = a^{-1} \circ x \circ y$$

$\Rightarrow f$ je izomorfizem.

Torej sta $(G, \circ)$ in $(G, *)$ izomorfni.

2. Naj bo G grupa in $S \subseteq G$. Centralizator množice S v grupi G je množica

$$C_G(S) = \{g \in G \mid gs = sg \text{ za vsak } s \in S\}.$$

12 (a) Pokažite, da je $C_G(S)$ podgrupa grupe G .

13 (b) Naj bo $G = S_4$ in $S = \{(1234), (13)\}$. Poiščite $C_G(S)$.

a) Pokažimo $C_G(S) \leq G$ po definiciji.

- zaprtost $a, b \in C_G(S) \Rightarrow \underline{ab} \in C_G(S)$

$$\begin{array}{ccccccc} a, b \in C_G(S) & \Rightarrow & \underline{ab} s & = & a s b & = & s \underline{ab} \\ s \in S & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & b \in C_G(S) & & a \in C_G(S) & & \Rightarrow ab \in C_G(S) \end{array}$$

- enota je ker 1_G , seveda velja $1_G s = s 1_G \quad \forall s \in S \Rightarrow 1_G \in C_G(S)$

- inverz $a \in C_G(S) \Rightarrow \underline{a^{-1}} \in C_G(S)$

Vzemimo prs. $a \in C_G(S)$, $s \in S$

Potem velja $as = sa \quad | \cdot a^{-1} \text{ z leve}$

$$\underline{a^{-1}} a s = a^{-1} s a \quad | \cdot a^{-1} \text{ z desne}$$

$$s a^{-1} = a^{-1} s a a^{-1}$$

$$\Rightarrow s a^{-1} = a^{-1} s, \text{ torej, } \underline{a^{-1} \in C_G(S)}$$

prs. $s \in S$

b) V $C_G(S)$ so tudi elementi S_4 , ki komutirajo z (13) in (1234)

Poiščimo tiste, ki komutirajo z (13) in preverimo, kateri od njih komutirajo tudi z (1234)

$$\sigma(13) = (13)\sigma \Rightarrow \sigma^{-1}(13)\sigma = (13)$$

$$\Rightarrow (13)^\sigma = (\overset{\substack{\uparrow \\ \text{veje}}}{1}^\sigma \overset{\substack{\uparrow \\ \text{veje}}}{3}^\sigma) = (13)$$

Dve možnosti: $\sigma: 1 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$
 $\sigma: 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$

Temu ustrejata 4 permutacije:
 $\text{id}, (13), (24), (13)(24)$

Od teh le id in $(13)(24)$ komutirajo z (1234) (preverite!)

$$\Rightarrow C_G(S) = \{\text{id}, (13)(24)\}$$

3. Naj bosta H in K grupi in $G = H \times K$.

- 10 (a) Naj bo red elementa $h \in H$ enak s in red elementa $k \in K$ enak t . Pokažite, da je red elementa (h, k) v grupi G enak najmanjšemu skupnemu večkratniku s in t .
- 15 (b) Dana je grupa $G = D_4 \times \mathbb{Z}_3$. Koliko elementov ima grupa G ? Za vsakega od možnih redov poiščite po en element grupe G tega reda.

a) Naj bo $a \in \mathbb{N}$ velja $(h, k)^a = (1_H, 1_K) = 1_G$

Potem je $(h, k)^a = (h^a, k^a) = (1_H, 1_K)$

Torej $h^a = 1_H$ in $k^a = 1_K \Rightarrow s \mid a$ in $t \mid a$

$\Rightarrow \text{lcm}(s, t) \mid a \Rightarrow \text{lcm}(s, t) \mid \text{red}((h, k))$

Pokažimo še, da je $(h, k)^{\text{lcm}(s, t)} = 1_G$ (iz tega potem sledi $\text{lcm}(s, t) = \text{red}((h, k))$)

$\exists x, y: \text{lcm}(s, t) = xs = yt$

$(h, k)^{\text{lcm}(s, t)} = (h^{xs}, k^{yt}) = \left(\underset{1_H}{h^s}^x, \underset{1_K}{k^t}^y \right) = (1_H, 1_K) = 1_G$

b) $|D_4| = 8, |\mathbb{Z}_3| = 3 \Rightarrow |G| = |D_4| \cdot |\mathbb{Z}_3| = \underline{\underline{24}}$

$\text{Red}(g) \mid |G|$ za vsak $g \in G$

Iz točka a) vem, da je $\text{red}((h, k)) = \text{lcm}(\text{red}(h), \text{red}(k))$

Redi elementov v D_4 : 1, 2, 4 (elementi reda 8 ni, ker D_4 ni ciklična grupa)

Redi elementov v $\mathbb{Z}_3$: 1, 3

Možni redi v G so torej 1, 2, 3, 4, 6, 12 (produkti 1, 2, 4 in 1, 3)

$D_4 = \langle \rho, \tau \mid \tau^2 = \rho^4 = \text{id}, \rho\tau = \tau\rho^{-1} \rangle$ $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Zaradi a) velja:

$$\text{red}((\text{id}, 0)) = 1$$

$$\text{red}((\tau, 0)) = 2$$

$$\text{red}((\text{id}, 1)) = 3$$

$$\text{red}((\rho, 0)) = 4$$

$$\text{red}((\tau, 1)) = 6$$

$$\text{red}((\rho, 1)) = 12$$

KOLOKVIJ, NALOGA 4

$$|\mathbb{Z}_{25}^*| = \varphi(25) = 5^1(5-1) = 20 \quad 3$$

$$\begin{aligned} a) \quad 6^2 &= 36 \equiv 11 \pmod{25} \\ 6^3 &\equiv 66 \equiv 16 \pmod{25} \\ 6^4 &\equiv 11^2 = 21 \pmod{25} \\ 6^5 &\equiv 6 \cdot 21 \equiv 126 \equiv 1 \pmod{25} \end{aligned} \quad \begin{matrix} 5 \\ H = \langle 6 \rangle = \{1, 6, 11, 16, 21\} \end{matrix}$$

b) Grupa $\mathbb{Z}_{25}^*$ je komutativna, zato je vsaka njena podgrupa tudi ciklika, torej $H \triangleq \langle 6 \rangle$.

$$\begin{aligned} c) \quad G/H &= \{ H = \{1, 6, 11, 16, 21\}, \\ &\quad H \cdot 2 = \{2, 12, 22, 7, 17\}, \\ &\quad H \cdot 3 = \{3, 18, 8, 23, 13\}, \\ &\quad H \cdot 4 = \{4, 24, 19, 14, 9\} \} \end{aligned} \quad 5$$

$$d) \quad |G/H| = \frac{|G|}{|H|} = 4 \quad 7$$

Torej je $G/H \cong \mathbb{Z}_4$ ali $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Preverimo red elementov:

$$\begin{aligned} (H \cdot 2) \cdot (H \cdot 2) &= H \cdot 4 \quad \leadsto \text{red}(H \cdot 2) > 2 \\ &\Rightarrow \text{red}(H \cdot 2) = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{red deli} \\ \text{moč grupe} \end{array} \right) \end{aligned}$$

~~11~~

Imamo element reda 4, v $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ne

takega elementa ni $\Rightarrow G/H \cong \mathbb{Z}_4$

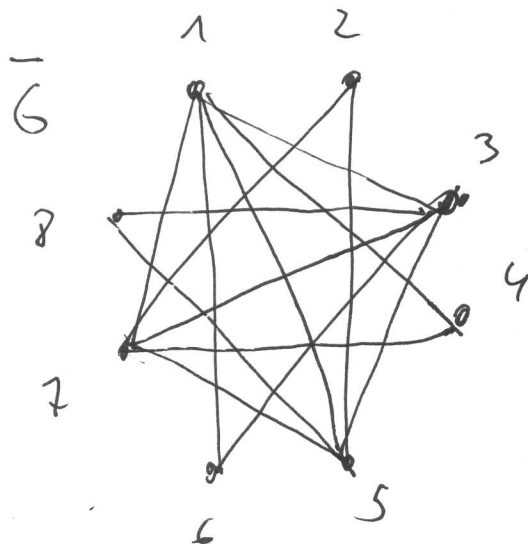
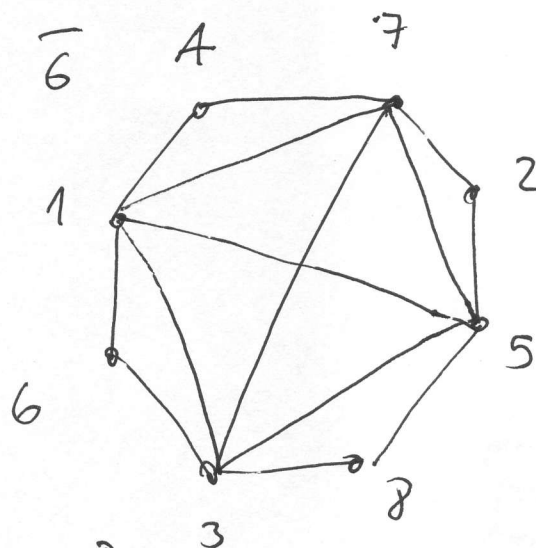
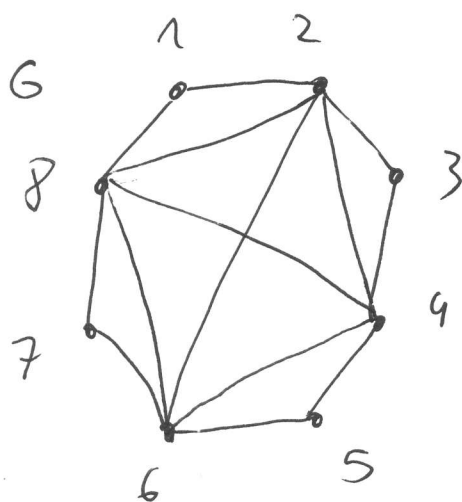
IZPIT, NALOGA 1

G Hamiltonov, $|V(G)| = 8$, $G \cong \bar{G}$

Ker je G Hamiltonov: $\deg_G(v) \geq 2 \quad \forall v \in V(G)$

Veljati mora še: $\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = 7$

Imamo več možnosti za stopnje vrhov, predstavljamo eno:
 $2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5$. Iz prever, ki manjkajo, se mno dači sestaviti.
 Hamiltonov cikel.



graf
 duple
 nerišemo,
 do so pr vsli. vozlišča
 ne Hamiltonov

1 4 7 2 5 8 3 6 1

Isomorfizem γ

G	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{G}$	4	7	2	5	8	3	6	1

Očitno bijekcija
 Je tudi izomorfizem,
 preveriti se lahko

u preveriti, saj
 stopnja vrhov uenaka in slikano
 vozlišča ~~so~~ u istoležna vozlišča.

4. G 4-regularni povezan graf $\Rightarrow$ ima cikel dolžine 3

Naj bo G povezan v ravnini, $\deg(v) = 4 \forall v \in V(G)$.

Označimo: $n = |V(G)|$

$$m = |E(G)|$$

f_i -- št. lic dolžine i

f -- št. vseh lic

Velja: $2m = 4n$ (lema o ročavih)

$$m = 2n$$

$$\sum_{i \geq 3} i f_i = 2m$$

$$n + m + f = 2 \quad (\text{Eulerjeva formula})$$

Recimo, da graf nima nobenega cikla dolžine 3.

Ker so vsi cikli dolžine 4 ali več, to pomeni, da ni nobenega lika dolžine 3.

$$\text{Zato: } 2m = \sum_{i \geq 3} i f_i = \sum_{i \geq 4} i f_i \geq \sum_{i \geq 4} 4 \cdot f_i = 4f$$

$$2 = n - m + f$$

$$8 = 4n - 4m + 4f$$

$$8 = 2m - 4m + 4f$$

$$4f = 8 + 2m \geq 8 + 4f$$

$$0 \geq 8$$

$\rightarrow \text{K}$

Torej mora graf imeti cikel dolžine 3.