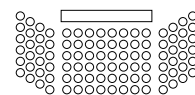


Diskretne strukture 2: 2. izpit

3. julij 2018

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____



Sedež (2.01)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

a) Naj bo T drevo, ki ima eno vozlišče stopnje 2, eno vozlišče stopnje 3, ..., eno vozlišče stopnje $k - 1$ in eno vozlišče stopnje k ; vsa ostala vozlišča so stopnje 1. Koliko vozlišč ima T ?

b) Naj bo G povezan graf, ki ima toliko vozlišč, kot ima povezav. Pokaži, da ali je G izomorfen ciklu, ali pa ima vozlišče stopnje 1.

2. naloga (25 točk)

Naj bo G ravninski graf z dano ravninsko risbo. Dokaži, da je G dvodelen graf natanko tedaj, ko imajo vsa lica sodo dolžino. Namig: indukcija na število lic.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}_4\}$. Definirajmo seštevanje kot $(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = ((a + c) \bmod 4) + ((b + d) \bmod 4)\sqrt{3}$ in množenje kot $(a + b\sqrt{3}) \cdot (c + d\sqrt{3}) = ((ac + 3bd) \bmod 4) + ((ad + bc) \bmod 4)\sqrt{3}$ (torej podobno kot običajno seštevanje in množenje le da dodamo mod 4).

a) Dokaži, da je $(A, +, \cdot)$ kolobar.

b) Dokaži, da če za element $x \in A$ velja $x^r = 0$ za nek $r > 0$, potem x ni obrnljiv. Če velja $x^r = 1$ ali $x^r = -1$ za nek $r > 0$, potem x je obrnljiv.

c) Poišči vse obrnlive elemente v A . Namig: uporabi b) točko za elemente $x = a + b\sqrt{3}$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ grupa in $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ preslikava definirana z

$$f(x, y) = 2x + 6y \bmod 12.$$

a) Dokaži, da je preslikava homomorfizem med G in $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

b) Poišči jedro in sliko preslikave. Kateri znani grupi je izomorfno jedro in kateri slika?

c) Poišči grupo H in homomorfizem h iz G v H , da je $G/\text{Ker}(h)$ izomorfna $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$.