



SLUČAJNI PROCESI 1

2. kolokvij

20. maj 2010

Ime in priimek: _____ Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, rešiti morate vse.
Skupaj lahko zberete 50 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, na katerem so naloge.

Vse odgovore utemeljite. Na voljo imate 90 minut. Veliko uspeha!

Naloga	a	b	c	Skupaj
1.				
2.			•	
3.				
4.				
Skupaj	•	•	•	

1. naloga [10 točk]

Vozila prihajajo do avtocestnega predora skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda = 2/\text{minuto}$. Za vožnjo skozi predor morajo vozniki osebnih vozil plačati 5 EUR, vozniki avtobusov 10 EUR, vozniki tovornjakov pa 25 EUR predornine. Privzemite, da je med vsemi vozili 70% osebnih avtomobilov, 20% avtobusov in 10% tovornjakov.

- (a) Izračunajte matematično upanje in disperzijo zneska, prejetega s predorninami v izbrani uri.
- (b) Izračunajte verjetnost, da v izbranih treh zaporednih minutah *v vsaki* minuti poberejo natanko 15 EUR predornine.
- (c) Zaradi nujnih vzdrževalnih del so predor za krajši čas zaprli. Do ponovnega odprtja se je pred predorom zbralo 50 vozil, od tega 7 tovornjakov. Določite porazdelitev števila osebnih vozil, ki so v tem času obtičali pred predorom.

2. naloga [10 točk]

Do prizorišča velikega koncerta na prostem vodi le ena dolga ravna cesta. Ker ob prizorišču ni parkirnih mest, obiskovalci svoja vozila parkirajo kar vzdolž ceste.

Naj slučajna spremenljivka L_k označuje dolžino k -tega vozila v vrsti. Privzemite, da so spremenljivke L_k , nenegativne, neodvisne in enako porazdeljene z upanjem $\mu < \infty$.

Prvi obiskovalec svoje vozilo parkira direktno ob vhodu, naslednja vozila pa se razvrstijo tako, da so med njimi presledki dolžine U_k , kjer so U_k neodvisne slučajne spremenljivke, vse porazdeljene enakomerno na $[0, 1]$. Privzemite še neodvisnost $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $\{L_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Naj N_x označuje število vozil, ki v celoti ležijo na razdalji največ $x \geq 0$ od vhoda.

(a) Dokažite, da je N_x prenovitveni proces z zaostankom.

(b) Korektno izračunajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N_x}{x}$.

3. naloga [15 točk]

Receptorka sprejema telefonske klice. Naj čas 0 označuje začetek njenega delovnega dneva, čas 8 pa konec. Privzemite, da pojavljanje telefonskih klicev lahko opišete z nehomogenim Poissonovim procesom s trenutno intenzivnostjo $\rho(t) = \sqrt{t}$, kjer čas $t \in [0, 8]$ merimo v urah. Dolžino klicev zanemarite.

- (a) Izračunajte verjetnost, da receptorka v prvi uri dela sprejme manj kot dva klica.
- (b) Privzemite, da je v prvi uri receptorka sprejela 2 telefonska klica. Kakšna je pogojna verjetnost, da bo v naslednjih 3 urah sprejela vsaj dva klica?
- (c) Privzemite, da je receptorka v prvi uri prejela 3 klice. Izračunajte pogojno matematično upanje časa tretjega klica S_3 .

4. naloga [15 točk]

Mestni avtobusi številka 1 podnevi z obračališča v Vižmarjih odhajajo vsakih 6 minut. Zaradi nepredvidljivih prometnih razmer v Šiški in centru mesta pa lahko odhode avtobusov s postajališča Jadranska v smeri Mestni log dobro opišemo s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda = 10/\text{uro}$.

Trije študentje Oddelka za matematiko hkrati končajo predavanja in želijo priti v Mestni log. Skupaj pridejo do postajališča Jadranska. V trenutku njihovega prihoda tam ni avtobusa.

Privzemite, da pešec za pot od postajališča Jadranska do Mestnega loga potrebuje A minut, kjer je A zvezna slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno na intervalu $[10, 15]$, avtobus pa isto pot opravi v B minutah, kjer je B diskretna slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno na $\{3, 8\}$ in neodvisna od prihodov avtobusov na postajališče Jadranska.

Študent *matematike* do Mestnega loga vedno pešači, študent *pedagoške matematike* pa se vedno pelje z avtobusom. Študent *finančne matematike* za pot uporablja naslednjo strategijo: Najprej na postajališču čaka 3 minute. Če v tem času pripelje avtobus, se odpravi z avtobusom, sicer pa odide peš.

- (a) Določite porazdelitev časa, ki ga za pot do Mestnega loga porabi finančni matematik.

Nasvet: Najprej določite zalogo vrednosti te slučajne spremenljivke, nato pa njeno porazdelitveno funkcijo.

- (b) Izračunajte pričakovane čase prihodov študentov v Mestni log.

- (c) Privzemite, da na postajališču srečajo študenta fizike, ki jim prijazno pove, da sam na avtobus čaka že 3 minute. Kako se spremenijo vaši odgovori pri nalogah (a) in (b).