Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

SLUČAJNI PROCESI 1

Pisni izpit

22. junij 2010

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna številka: ____________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 3, rešiti morate vse. Skupaj lahko zberete 50 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, na katerem so naloge.

Izpit morate obvezno oddati.

Vse odgovore utemeljite. Na voljo imate 100 minut. Veliko uspeha!

Rezultati bodo objavljeni do četrtka, 24. junija 2010, v spletni učilnici predmeta.

Naloga	a	b	c	d	Skupaj
1.					
2.					
3.					
Skupaj	•	•	•	•	

1. naloga [15 točk]

Ribiča A in B sta se odpravila k reki lovit ribe. Privzemite, da število ulovljenih rib posameznega ribiča predstavlja homogeni Poissonov proces ter da sta procesa med sabo neodvisna. Pri tem ribič A v povprečju ujame 2 ribi na uro, ribič B pa 3 na uro. Do reke prideta v času 0.

(a) Ribiča sta se dogovorila, da bosta končala z ribolovom, ko bosta skupaj ujela 10 rib. Naj slučajna spremenljivka X pomeni trajanje ribolova. Določite upanje in disperzijo spremenljivke X.

(b) V prvi uri sta ribiča skupaj ujela 4 ribe. Izračunajte pogojno verjetnost, da je pri tem vsaj 2 ribi ujel ribič B.

(c) V prvih dveh urah je vsak ribič ujel 3 ribe. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo njun ribolov trajal vsaj še eno uro?

(d) Ker se je 2 uri po prihodu ribič B naveličal ribolova, sta se dogovorila, da domov odideta, ko vsak od njiju ujame vsaj še eno ribo. Naj spremenljivka Y pomeni čas do odhoda domov. Določite porazdelitev in upanje spremenljivke Y.

2. naloga [15 točk]

Vir radioaktivnega sevanja oddaja delce alfa skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo $\lambda > 0$ na enoto časa. V trenutku 0 prižgemo detektor delcev alfa. Privzemite, da po vsakem zaznanem delcu detektor postane neuporaben za naslednjih b enot časa, kjer je b znana konstanta. Če vir v tem času odda delec, ga detektor ne zazna. Naj bo R_t proces štetja delcev, ki jih detektor zazna.

(a) Natančno karakterizirajte proces R_t.

(b) Zapišite porazdelitvene funkcije in verjetnostne gostote vseh medprihodnih časov.

(c) Izračunajte verjetnost, da detektor zazna vseh prvih k oddanih delcev.

(d) Korektno izračunajte $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\mathrm{E}(R_t)}{t}$.

3. naloga [20 točk]

Asistent pri predmetu Finančni praktikum prejema domače naloge študentov skladno s homogenim Poissonovim procesom z intenzivnostjo 2/dan. Asistent se loti pregledovanja nalog šele, ko zbere 10 domačih nalog. Privzemite, da v času 0 asistent nima nobene domače naloge. Naj S_i označuje trenutek, ko se asistent i-tič loti pregledovanja nalog. Čas, ki ga porabi za pregledovanje nalog, zanemarite.

(a) Dokažite, da trenutki S_i predstavljajo prenovitveni proces. Natančno opišite njegove medprihodne porazdelitve.

(b) Določite pričakovani čas trenutka, ko se asistent tretjič loti pregledovanja nalog.

(c) Naj v trenutku t spremenljivka X pomeni čas, ki bo pretekel do trenutka, ko se bo asistent naslednjič lotil pregledovanja domačih nalog. Naj $e_x(t) = \mathrm{P}(X \leq x)$ označuje porazdelitveno funkcijo spremenljivke X. Izpeljite prenovitveno enačbo, ki jo reši funkcija $e_x(t)$.

(d) Privzemite, da asistent za dva tedna odide na dopust. Naj bo spremenljivka Y število študentov, bodo v tem času oddali svojo domačo nalogo. Izračunajte upanje in disperzijo slučajne spremenljivke Y.