

1. Izpit

Uvod v diferencialno geometrijo

3.2.2017

12⁰⁰ – 14⁰⁰ 2.01

1. [25%] Naj bo $\gamma(s)$ naravno parametrizirana krivulja v $\mathbb{R}^3$ z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo ($\kappa(s) > 0$). Naj bodo t.i. *prirejene funkcije* $a(s)$, $b(s)$ in $c(s)$ določene z zvezo

$$\gamma(s) = a(s)\vec{T}(s) + b(s)\vec{N}(s) + c(s)\vec{B}(s) \quad (*)$$

- (a) Izračunaj funkcije a, b, c za spiralo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. (nasvet: krivuljo najprej naravno parametriziraj.)
- (b) Izrazi fleksijsko in torzijsko ukrivljenost krivulje γ s pomočjo funkcij a, b, c in njihovih odvodov (nasvet: odvajaj $(*)$ in uporabi Frenetove formule).
- (c) Naj bodo $\bar{a}(s)$, $\bar{b}(s)$ in $\bar{c}(s)$ poljubne funkcije. Ali v splošnem obstaja naravno parametrizirana krivulja $\gamma(s)$, katere prirejene funkcije so ravno $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$?

2. [25%] Dana naj bo enotska sfera S^2 s parametrizacijo

$$\sigma(\varphi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta),$$

kjer je $\varphi \in [0, 2\pi]$ in $\vartheta \in [0, \pi]$. Preslikava $\Phi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ naj bo dana s predpisom $\Phi(\sigma(\varphi, \vartheta)) = (r(\vartheta) \cos \varphi, r(\vartheta) \sin \varphi)$ za neko funkcijo $r(\vartheta)$.

- (a) Naj bo $r(\vartheta) = \vartheta$. Ali je Φ konformna? Ali Φ ohranja površine?
 - (b) Določi funkcijo $r(\vartheta)$ tako, da bo Φ ohranjala površine.
3. [25%] Dana je ploskev S , ki jo dobimo z rotacijo množice $K = \{(x, 0, \tan x) \mid x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\}$ okoli z -osi. Naj se naravno parametrizirana geodetka začne v točki $(\pi, 0, 0)$.
- (a) Poišči največji kot, ki ga geodetka lahko oklepa z meridianom, da je neomejena.
 - (b) Poišči kot, ki ga geodetka mora oklepati z meridianom, da v celoti leži nad ravnino $z = -1$.
4. [25%] Dana je enotska sfera S^2 in krivočrtni 4-kotnik $\mathcal{K}$ na zgornji polsferi, z lastnostjo, da je njegova projekcija na xy -ravnino ravno kvadrat

$$\square = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, |y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

- (a) Pokaži, da so vsi notranji koti krivočrtnega 4-kotnika $\mathcal{K}$ enaki 0.
- (b) Izračunaj ploščino krivočrtnega 4-kotnika $\mathcal{K}$.

Rešitve

1. $\gamma(s) = (\cos s/\sqrt{2}, \sin s/\sqrt{2}, s/\sqrt{2})$ in dobimo

$$\vec{T} = \dots, \vec{N} = \dots \vec{B} = \dots$$

$$\gamma(s) = \frac{s}{2}\vec{T} - \vec{N} + \frac{s}{2}\vec{B}$$

V splošnem dobimo

$$a' = b\kappa + 1 \quad b' = -a\kappa + c\tau \quad c' = -b\tau.$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

od koder

$$\kappa = \frac{a' - 1}{b} \quad \tau = -\frac{c'}{b}$$

npr. če $a' = 1$ in $c' \neq 0$, potem a, b, c niso prišli iz krivulje.

2. Dobimo pogoj ohranjanja površin

$$rr' = \sin \vartheta \rightarrow r = \sqrt{C - 2 \cos \vartheta}.$$

3. Na začetku imamo $\pi \sin \psi$, ki mora biti vsaj $\pi/2$, torej $\vartheta \leq \frac{\pi}{6}$.

Mora se odbiti od vzporednika $z = -1$, torej je mejni ψ določen z $\pi \sin \psi = \frac{3\pi}{4}$.

4. Koti so 0, ker so tang. vektorji v kotih hrati tangetni na ekvator in leživjo v navpični ravnini. Stranice so vzporedniki na zenitnem kotu $\frac{\pi}{4}$ in imajo geod. ukr. -1 . Dobimo

$$(-1)4\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\pi - P$$

$$P = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$