

1. kolokvij

Uvod v diferencialno geometrijo

5.12.2016

15⁰⁰ – 17⁰⁰ 3.04

1. [33%] Dana naj bo gladka krivulja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero naj velja, da je $|\gamma(t)| = 1$ za vsak $t \in [a, b]$ ter, da vektorji $\gamma(t)$, $\dot{\gamma}(t)$ in $\ddot{\gamma}(t)$ tvorijo pozitivno orientirano bazo za vsak $t \in [a, b]$. Naj bo $c > 0$ in

$$\Gamma(t) = c \int_a^t (\gamma(u) \times \dot{\gamma}(u)) du.$$

Pokaži, da velja:

- Fleksijska ukrivljenost krivulje Γ je strogo večja od 0 za vsak $t \in [a, b]$.
 - Izrazi Frenetov okvir krivulje Γ s pomočjo krivulje γ in njenih odvodov.
 - Pokaži, da je torzijska ukrivljenost krivulje Γ konstantno enaka $\frac{1}{c}$.
2. [33%] Dana je ploskev $S \in \mathbb{R}^3$, parametrizirana z

$$\sigma(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \quad u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

- Preveri, da je $\sigma^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ konformna preslikava.
 - Poišči vsaj eno preslikavo $S \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki ohranja površine.
(Namig: Lahko uporabiš preslikavo $\rho : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ oblike $\rho(u, v) = (u, y(v))$ za primerno funkcijo y .)
3. [34%] Dana je ploskev $S \in \mathbb{R}^3$, parametrizirana z

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)) \quad u \in (0, \infty), v \in (0, 2\pi),$$

kjer je $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gladka funkcija.

- Poišči vse funkcije $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ za katere je Gaussova ukrivljenost $K(p)$ enaka 0 za vsak $p \in S$.
- Naj bo $f(u) = 2u$. Poišči izometrijo $S \hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

Rešitve

1. • Iz

$$\Gamma(t) = c \int_a^t (\gamma(u) \times \dot{\gamma}(u)) du.$$

dobimo $\dot{\Gamma}(t) = c\gamma(t) \times \dot{\gamma}(t)$ in $\ddot{\Gamma}(t) = c\gamma(t) \times \ddot{\gamma}(t)$. Od tod dobimo

$$\dot{\Gamma} \times \ddot{\Gamma} = c^2[\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\gamma$$

kar pomeni, da je $\kappa(t) = \frac{|\dot{\Gamma} \times \ddot{\Gamma}|}{|\dot{\Gamma}|^3} = \frac{c^2[\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]}{|\dot{\gamma}|^3} \neq 0$, ker je mešani produkt neničelen.

- Iz (splošne formule) $\vec{B} = \frac{\dot{\Gamma} \times \ddot{\Gamma}}{|\dot{\Gamma} \times \ddot{\Gamma}|}$ sledi

$$\vec{B} = \gamma$$

Ker je $\vec{T} = \frac{\gamma \times \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$ in je $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = -\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$.

- Torzijska ukrivljenost je dana z $\tau = \frac{(\dot{\Gamma} \times \ddot{\Gamma}) \cdot \ddot{\Gamma}}{|\dot{\Gamma} \times \ddot{\Gamma}|^2} = \frac{1}{c}$ (vstavimo $\ddot{\Gamma} = c\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} + c\gamma \times \ddot{\gamma}$).

Op: Malo hitreje torzijo lahko dobimo direktno iz Frenetovih formul.

Ker je $\vec{B} = \gamma$ in $\vec{N} = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$ in je $\vec{B}' = -\tau\vec{N}$, dobimo $\vec{B}' = \dot{\vec{B}} \frac{1}{c|\dot{\gamma}|} = \dot{\gamma} \frac{1}{c|\dot{\gamma}|}$.

2. Imamo

$$\sigma(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \quad u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

- Prva fundamentalna forma je $E = G = \cosh^2 v$ in $F = 0$, torej je σ konformna.
- Izberimo npr. $\rho(u, v) = (u, y(v))$, kar nam da prvo fundamentalno formo $E = y'^2$, $F = 0$ in $G = 1$. Površine se bodo ohranjale, če bo veljalo $y'(v)^2 = \cosh^4 v$ oz.

$$y(v) = \int_0^v \cosh^2 s ds = (p.p.) = \frac{v + \sinh(v) \cosh(v)}{2}.$$

3. Imamo

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)) \quad u \in (0, \infty), v \in (0, 2\pi),$$

- Velja $E = 1 + f'(u)^2$, $F = 0$, $G = u^2$,

$$\vec{n} = \frac{(-f' \cos v, -f' \sin v, 1)}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

in $L = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}}$, $M = 0$, $N = \frac{u f'}{\sqrt{1 + f'^2}}$ od koder dobimo

$$K = \frac{u f' f''}{u^2(1 + f'^2)(1 + f'^2)} = 0$$

čee $f' f'' = 0$ oz. $f = Au + B$.

- Naj bo $f(u) = 2u$. Potem je $\sigma(u, v) = u(\cos v, \sin v, 2)$ in $E = 5$, $F = 0$ in $G = u^2$. Z izbiro $\rho(u, v) = (\sqrt{5}u \cos \frac{v}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}u \sin \frac{v}{\sqrt{5}})$ dobimo enako prvo fundamentalno formo, kar pomeni, da je $\rho \circ \sigma^{-1}$ iskana izometrija.