

O virih nalog

Navdih za naloge smo črpali iz različnih koncev. Poleg pisnih virov, naštetih na koncu, tu omenimo še pogovore s prof. Plestenjakom in vprašanja študentov na vajah. Če v nadaljevanju ni drugače povedano, smo naloge vzeli iz [1] ali [2].

1 Vaje 24. 2. 2017

Naloga 1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Lastne pare AA^T izrazi s singularnimi vektorji in vrednostmi matrike A .

Rešitev: Zapišemo singularni razcep matrike A : $A = U\Sigma V^T$. Iz tega sledi, da je

$$AA^T = U \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_n^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^T.$$

AA^T je torej (ortogonalno) podobna diagonalni matriki z n diagonalnimi elementi (lastnimi vrednostmi) $\lambda_j = \sigma_j^2$ in $m - n$ diag. elementi (l. vr.) $\lambda_j = 0$. Iz zgornjega je tudi razvidno, da so lastni vektorji matrike AA^T kar stolpci U .

Opombe: Sledi, da lahko pri računanju *na roke* singularne vrednosti za matriko A najdemo tako, da izračunamo lastne vrednosti $A^T A$ ali AA^T (morda pridemo oz. izgubimo nekaj ničel). Podobno velja za singularne vektorje.

Naloga 2. Izračunaj singularni razcep za $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Izračunamo lastne vrednosti za

$$A^T A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

in dobimo $\lambda_1 = 25$ ter $\lambda_{2,3} = 0$. Prek računanja $\ker(A^T A - 25I)$ oz. $\ker(A^T A - 0I)$ dobimo $v_1 = \frac{1}{5}[3 \ 0 \ 4]^T$ oz. $v_2 = \frac{1}{5}[4 \ 0 \ -3]$ ter $v_3 = [0 \ 1 \ 0]$. Izreki linearne algebre nam zagotavljajo, da je $v_1 \perp v_{2,3}$, medtem ko smo morali pri izbiri v_3 paziti, da bo $v_2 \perp v_3$.

Očitno mora biti $U = [1]$, a smo to vseeno preverili z izračunom $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1$.

Opombe: Iz prve naloge sledi, da bi lahko izračun začeli tudi z $AA^T = [25]$. Premislili smo, da je v tem primeru lahko izračunati lastne vrednosti ter V , a imamo po drugi strani več dela z ortogonalizacijo vektorjev v matriki U .

Naloga 3. $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ je ortogonalni projektor, če velja $P = P^2$ in $P = P^H$. Dokaži, da sta točki

1. P je ort. projektor
2. Obstaja $U \in \mathbb{C}^{m \times n}$ z ortogonalnimi stolpci, za katero velja $P = UU^H$

ekvivalentni.

Rešitev: Rešitev je ista kot v [2].

Opombe: Opazili smo, da za smer $1 \Rightarrow 2$ ne potrebujemo singularnega razcepa. Vemo namreč, da je P identični operator, če ga skrbimo na $\text{im } P$, torej se ga da v bazi, ki je unija baz za prostora $\text{im } P$ in $\ker P$, zapisati kot

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemer lahko bazo izberemo tako, da so vektorji v njej ortonormirani (P je normalna matrika). Če bazo zapišemo bločno v prehodno matriko kot $B = [B_{\text{IM}} \ B_{\text{KER}}]$, dobimo $P = B_{\text{IM}} B_{\text{IM}}^H$.

Naloga 4. Pokaži, da je za $n \leq m$ in matriki $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ter $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$, pri čemer je A polnega ranga, minimum izraza

$$\|AX - B\|_F$$

dosežen pri $X = A^+ B$.

Rešitev: Najprej smo ugotovili, da že znamo rešiti nalogo za $p = 1$, saj je v tem primeru $\|AX - B\|_F = \|AX - B\|_2$. Izpeljali smo, da velja $X = (A^T A)^{-1} A^T B$, ker je matrika A polnega ranga. Nato smo opazili, da za splošen p velja

$$AX - B = [Ax_1 - b_1 \ Ax_2 - b_2 \ \cdots \ Ax_p - b_p],$$

kjer so x_i in b_i stolpci matrik X in B . Ker je

$$\|AX - B\|_F^2 = \sum_i \|Ax_i - b_i\|_2^2,$$

problem razpade na p problemov, ki jih že znamo rešiti. Upoštevamo edinost A^+ in dokažemo, da matrika $(A^T A)^{-1} A^T$ zadošča zahtevam za A^+ .

Naloga 5. Dana sta matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, in njen singularni razcep $A = U \Sigma V^T$. Dokaži, tvorijo pari

$$\pm \sigma_i, \begin{bmatrix} v_i \\ \pm u_i \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad 0, \begin{bmatrix} 0 \\ u_j \end{bmatrix},$$

kjer je $1 \leq i \leq n$ in $n < j \leq m$, lastni sistem za matriko

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: V B vstavimo $A = U \Sigma V^T$ in preverimo, $Ax = \lambda x$ za vse predlagane lastne pare (λ, x) iz navodila. Pri tem moramo biti toliko skrbni, da opazimo, da je $\Sigma^T u_j = 0$ za $j > n$.

[Od tu rešeno 1. marca] Sedaj preverimo samo še, da so dobljeni vektorji linearno neodvisni. Predpostavimo, da je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \alpha_{n+i} \begin{bmatrix} v_i \\ -u_i \end{bmatrix} + \sum_{i=n+1}^m \alpha_{n+i} \begin{bmatrix} 0 \\ u_i \end{bmatrix} = 0$$

in dokažemo, da za vse koeficiente velja $\alpha = 0$. To postane očitno, ko zgornjo enačbo nadomestimo z dvema ekvivalentnima (spodnjo in zgornjo) in upoštevamo, da so v -ji in u -ji linearno neodvisni.

Opombe: Nekoč kasneje bomo spoznali, da matrika B igra pomembno vlogo pri natančnejšem računanju singularnih vrednosti.

2 Vaje 1. 3. 2017

Naloga 1. Prevedi računanje singularnega razcepa za $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$, na računanje singularnega razcepa, kjer uporabljaš zgolj realno aritmetiko. Pokaži, da pri tem dobiš dvojne singularne vrednosti.

Rešitev: Prva ideja: nekaj z $A^H A$. Kar hitro smo jo zatrli, saj ima ta matrika res le realne lastne vrednosti, ni pa nujno tudi sama realna. Oglej si npr. $B^H B$ za

$$B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Naslednji poskus: A razdelimo na realni in imaginarni del: $A = A_1 + iA_2$ in spet poskusimo z $A^H A$. Nismo znali nadaljevati. Zatem smo *vse* (morebiti) kompleksne matrike v izrazu $A = U\Sigma V^H$ razdelili na realni in imaginarni del:

$$A_1 + iA_2 = (U_1 + iU_2)\Sigma(V_1^T - iV_2^T).$$

Iz zgornjega dobimo

$$A_1 = U_1\Sigma V_1^T + U_2\Sigma V_2^T \quad \text{in} \quad A_2 = U_2\Sigma V_1^T - U_1\Sigma V_2^T,$$

kar lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2 & -U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}.$$

Zgornje nas spominja na singularni razcep *neke* matrike, pri čemer

- upamo, da je $\tilde{U}$ ortogonalna matrika in
- moramo $\tilde{V}$ še dopolniti do ortogonalne matrike, tako da dodamo nov stolpec blokov.

Najprej izberemo novega kandidata za razširjen $\tilde{V}$. Ideja:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2 & -V_1 \end{bmatrix},$$

saj je tako novi $\tilde{V}$ enake oblike kot $\tilde{U}$. Preverimo, da je $\tilde{V}$ ortogonalna matrika oz. da velja $\tilde{V}^T \tilde{V} = I$. Ko izračunamo $\tilde{V}^T \tilde{V}$ in upoštevamo $V^H V = (V_1 + iV_2)^H (V_1 + iV_2) = I$, to postane očitno (enakost $VV^H = I$ ne pomaga). Sedaj je očitno, da je tudi $\tilde{U}$ ortogonalna.

Ugotovimo še, da je

$$\tilde{U} \tilde{\Sigma} \begin{bmatrix} V_2^T \\ -V_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{bmatrix},$$

torej je

$$\tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^T = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \tilde{A}.$$

Sedaj se spomnimo, da za poljubno matriko C velja: če so vektorji v_i ortonormirani in so tudi u_i ortonormirani ter še dodatno velja $Cv_i = \sigma_i u_i$, potem že imamo singularni razcep za matriko C (pri tem ni pomembno, ali je $\sigma_i \neq 0$). Preverimo torej, kaj je $\tilde{A}\tilde{v}$, kjer je $\tilde{v}$ stolpec matrike $\tilde{V}$. Ker velja $\tilde{U}\tilde{\Sigma} = \tilde{A}\tilde{V}$, imamo

$$\tilde{U}\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1^1 & \sigma_2 u_1^2 & \cdots & \sigma_n u_1^n & \sigma_1 u_2^1 & \sigma_2 u_2^2 & \cdots & \sigma_n u_2^n \\ \sigma_1 u_2^1 & \sigma_2 u_2^2 & \cdots & \sigma_n u_2^n & \sigma_1(-u_1^1) & \sigma_2(-u_2^2) & \cdots & \sigma_n(-u_2^n) \end{bmatrix},$$

torej je

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} v_1^i \\ v_2^i \end{bmatrix} = \sigma_i \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \tilde{A} \begin{bmatrix} v_2^i \\ -v_1^i \end{bmatrix} = \sigma_i \begin{bmatrix} u_2^i \\ -u_1^i \end{bmatrix} \quad (2)$$

za $1 \leq i \leq n$, pri čemer je $v_{1,2}^i$ i -ti stolpec matrike $V_{1,2}$ (analogno za $u_{1,2}^i$). Ugotovili smo torej:

- stolpci $\tilde{V}$ oz. $\tilde{U}$ so desni oz. levi singularni vektorji za matriko $\tilde{A}$,
- singularne vrednosti za $\tilde{A}$ so dvojne singularne vrednosti matrike A .

Recept za izračun SVD za matriko A v realnem je torej lahko sledeč:

1. Izračunamo singularni razcep za $\tilde{A}$ in dobimo singularne vektorje $\tilde{v}$ in $\tilde{u}$ za singularne vrednosti $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3 = \sigma_4 \geq \cdots \geq \sigma_{2n-1} = \sigma_{2n}$
2. Definiramo matrike $U_{1,2}$, Σ in $V_{1,2}$:
 - V_1 oz. V_2 zgradimo po stolpcih iz zgornjih oz. spodnjih polovic vektorjev $\tilde{v}_{2i}$,
 - U_1 oz. U_2 zgradimo po stolpcih iz zgornjih oz. spodnjih polovic vektorjev $\tilde{u}_{2i}$,
3. Izračunamo $U = U_1 + iU_2$, $V = V_1 + iV_2$, medtem ko Σ dobimo tako, da damo na glavno diagonalo števila σ_{2i} .

Poigrali smo se z matriko (1) in nekaj različic recepta (glej opombe) preizkusili tudi v praksi z uporabo ukaza `svd` v Octavu (povsem isti postopek bi lahko izvedli v Matlabu).

Opombe: V receptu, kot smo ga definirali v rešitvi, vedno upoštevamo prvo enakost v (2). Lahko bi tudi drugo in bi bil potem i -ti stolpec matrike V_1 nasprotni vektor spodnje polovice vektorja $\tilde{v}_{2i}$, i -ti stolpec matrike V_2 pa bi bila zgornja polovica vektorja $\tilde{v}_{2i}$. Podobno za $U_{1,2}$.

Prav tako lahko pri kateri izmed vrednosti i (ali pa pri vseh) začnemo tudi z $\tilde{v}_{2i-1}$, torej imamo v resnici eksponentno mnogo receptov.

3 Vaje 8. 3. 2017

Naloga 1. Preslikava $\varphi: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ zavrti matriko, npr.

$$\varphi: \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da imata matriki A in $\varphi(A)$ iste singularne vrednosti.

Rešitev: Najprej najdemo pravi predpis za φ : ugotovimo, da jo je najlažje izvesti v dveh korakih: element matrike A na mestu (i, j) najprej premaknemo na mesto (j, i) , nato pa še na $(j, m - i + 1)$. Sledi, da je φ kompozitum transponiranja in operacije, ki obrne vrstni red stolpcev, kar lahko opišemo z množenjem z matriko

$$B = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

z desne, tj. $\varphi(A) = A^T B$. Ugotovili smo, da nam singularni razcep $A = U \Sigma V^T$ ne pomaga, zato smo poskusili z definicijo singularnih vrednosti: to so lastne vrednosti matrike $A^T A$. Računamo: $\varphi(A)^T \varphi(A) = B^T A A^T B$. To nam ni bilo tako všeč, zato smo izračunali še $\varphi(A) \varphi(A)^T = A^T B B^T A$. Ker vemo, da je B ortogonalna, je $\varphi(A) \varphi(A)^T = A^T A$, s tem pa je dokaz zaključen.

Opombe: Opazimo lahko dvoje:

- tudi z izrazom $\varphi(A)^T \varphi(A) = B^T A A^T B$ lahko pridemo skozi, ker iz njega sledi, da sta si matriki $\varphi(A)^T \varphi(A)$ in $A A^T$ podobni, torej imata iste lastne vrednosti,
- enako trditev lahko dokažemo za kompleksne matrike (smo pustili za domačo nalogo).

Naloga 2. Dani sta matriki $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ in $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$. Najdi rešitev enačbe $AX = B$ po metodi totalnih najmanjših kvadratov. Predpostaviš lahko, da je matrika $[A \ B]$ ranga $n + k$ in da rešitev obstaja.

Rešitev: Najprej smo se spomnili izpeljave s predavanj, ki nalogo reši za $k = 1$. Potem smo poskusili slediti postopku. Zapišemo singularni razcep matrike $[A \ B] = U \Sigma V^H$ in označimo singularne vrednosti v matriki Σ s σ_i , $1 \leq i \leq n + k$.

Iščemo taki matriki $\tilde{A}$ in $\tilde{B}$, da bo norma $\left\| [\tilde{A} \ \tilde{B}] - [A \ B] \right\|_F$ najmanjša, pri čemer zahtevamo, da so stolpci $\tilde{B}$ v $\text{im } \tilde{A}$, kar nekoliko površno zapišemo $\tilde{B} \in \text{im } \tilde{A}$. Iz slednjega sledi, da je rang matrike $[\tilde{A} \ \tilde{B}]$ enak n .

Po drugi strani vemo, da bo najboljši približek ranga n za $[A \ B]$ matrika

$$[\tilde{A} \ \tilde{B}] = [A \ B] - \sum_{i=n+1}^{n+k} \sigma_i u_i v_i^T = \sum_{i \leq n} \sigma_i u_i v_i^T.$$

Na tem mestu opozorimo, da v splošnem ne moremo sklepati

$$\text{rang} [\tilde{A} \ \tilde{B}] = n \implies \tilde{B} \in \text{im } \tilde{A},$$

zato tu izkoristimo predpostavko o obstoju takega X , da je $\tilde{A}X = \tilde{B}$ oz.

$$[\tilde{A} \ \tilde{B}] \begin{bmatrix} X \\ -I \end{bmatrix} = 0.$$

Ker je $\dim \ker [\tilde{A} \ \tilde{B}] = k$ in zaradi ortogonalnosti vektorjev v_i velja $v_i \in \ker [\tilde{A} \ \tilde{B}]$ za $i > n$, je zadnjih k stolpcev matrike V ravno baza jedra za C . Iz tega sledi

$$[\tilde{A} \ \tilde{B}] [v_{n+1} \ \cdots \ v_{n+k}] = [\tilde{A} \ \tilde{B}] \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} = 0, \quad (3)$$

kjer je

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{21} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

in je $V_{22} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ spodnji del zadnjih k stolpcev matrike V . Enačbo (3) pomnožimo z desne z $-V_{22}^{-1}$ (predpostavimo obstoj inverza) in končno dobimo $X = -V_{21}V_{22}^{-1}$.

Opombe: Opozorimo na razliko med problemom najmanjših kvadratov in problem totalnimi najmanjših kvadratov. Pri nalogi 4 na vajah 1 smo videli, da lahko matriko X , ki minimizira $\|AX - B\|_F$, zgradimo stolpec po stolpec: $X = [A^+b_1 \cdots A^+b_k]$ tj. če matriko B razširimo z dodatnim stolpcem, bo tudi X preprosto dobil dodatni stolpec. Pri totalnih najmanjših kvadratih ni tako.

Naloga 3. Demonstracija uporabnosti singularnega razcepa pri razpoznavanju slik.

Rešitev: Ogledali smo si primer, kako je mogoče avtomatsko razpoznavati številke. Imamo črno bele slike števk, ki jih predstavimo kot matrike (v tem konkretnem primeru dimenzij 16×16). Podatki so razdeljeni na učno množico (tu računalniku povemo, katera številka je na dani sliki) in na testno množico (tu bo dani algoritem poskusil sam razpoznati številko na sliki).

Od sedaj naprej si slike $\equiv$ matrike predstavljamo kot dolge vektorje s_j (dolžine 256). Razdelimo jih v skupine glede na to, katero številko predstavljajo, in potem vsako skupino zložimo v matriko

$$T_i = [s_1^i \ s_2^i \ \cdots \ s_{N(i)}^i]$$

za številke $0 \leq i \leq 9$. Z $N(i)$ smo označili število slik številke i . Vsaka vrstica tabele podatkov oz. matrike T_i sedaj pripada nekemu pikslu na slikah in pove, kako se vrednosti na danem pikslu spreminjajo med različnimi slikami iste številke.

Za vsak T_i izračunamo singularni razcep $T_i = U_i \Sigma_i V_i^T$ in shranimo prvih k stolpcev matrike U_i , recimo temu U_i^k . Ti pripadajo 'najpomembnejšim' komponentam $\equiv$ pikslom za dano številko. Zakaj so najpomembnejše: naslednjič na vajah, če ne bo to pokazano na predavanjih.

Za dano testno sliko $s \in \mathbb{R}^{256 \times 1}$ je rezultat množenja $b_i(s) = (U_i^k)^T s$ kar razvoj po prvih k sing. vektorjih, saj je U_i ortogonalna. Številka i , pri kateri ima vektor $b_i(s)$, ki ima največjo normo, je tista, pri kateri se testna slika s najbolj prilega podprostoru, ki ga razpenjajo pomembne komponente za i .

Seveda je to zgolj dobra motivacija - videli smo, da tak način razpoznavanja ni popoln.

Opombe: Videli smo, da obstajajo tudi drugi načini razpoznavanja števk. Izračunamo lahko povprečne slike $\bar{s}_i = \sum_{j=1}^{N(i)} s_j^i$. Nato si izberemo poljubno normo in preverimo, kateremu povprečju je dana testna slika s najbližje.

Tretja možnost, ki smo jo spoznali, je bil algoritem najbližjega soseda. Za razliko od zgornjega pristopa smo tu našli sliko s_J^I , za katero velja $\|s - s_J^I\| = \min_{i,j} \|s - s_j^i\|$ in nato sliko s razglasili za sliko števk I .

4 Vaje 15. 3. 2017

Naloga 1. Oglejmo si minimizacijski problem, ki je posplošitev regularizacije Tihonova. Za dana matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, in vektor $b \in \mathbb{R}^m$ iščemo

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|Lx\|_2^2.$$

Če je L obrnljiva matrika, prevedi reševanje posplošenega problema na standardnega.

Rešitev: Nalogo smo rešili po nekoliko daljši poti, saj smo opazovali normo vektorja

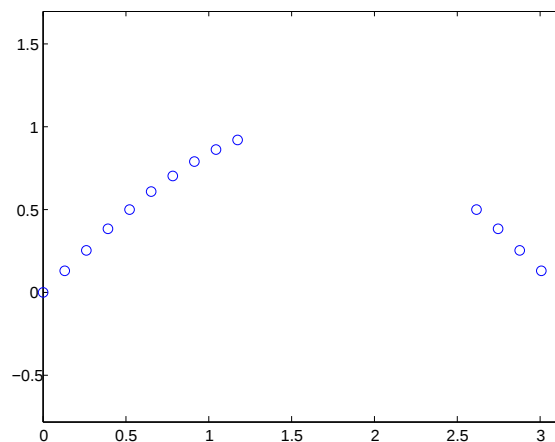
$$\begin{bmatrix} Ax - b \\ \alpha Lx \end{bmatrix}.$$

Na koncu smo ugotovili, da je lažje vpeljati $y = Lx$, kar nam problem takoj prevede na iskanje minimuma za

$$\|AL^{-1}y - b\|_2^2 + \alpha^2 \|y\|_2^2,$$

kar ni pa nič drugega kot regularizacija Tihonova za matriko AL^{-1} .

Naloga 2. (Vir navdiha: [3]) Za dani vektor znanih funkcijskih vrednosti y smo nekaj vrednosti pozabili. Na sliki 1 vidimo primer za sinus na intervalu $[0, \pi]$. Denimo, da poznamo



Slika 1: Manjkajoče vrednosti za sinus.

N_L prvih in N_D zadnjih vrednosti, vmesnih N_M nam pa manjka. Če vse vrednosti (tudi

iskane) zložimo v vektor y , lahko izgubo vmesnih vrednosti simuliramo s primerno matriko A , za katero je

$$b = \begin{bmatrix} y_L \\ y_D \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_L \\ y_M \\ y_D \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Izkaže se, da za primerne izbire matrike L , lahko dobimo rešitve

$$\min_y \|Ay - b\|_2^2 + \alpha_2^2 \|Ly\|_2^2 \quad (5)$$

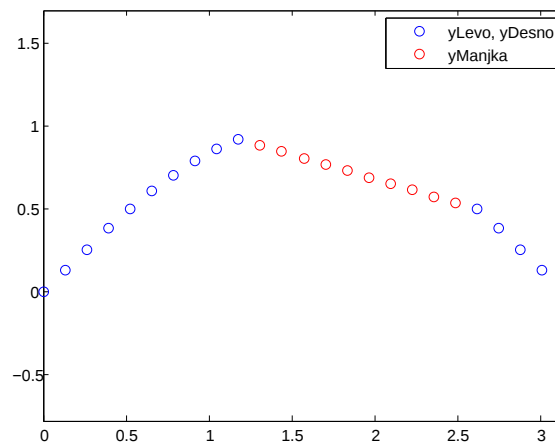
z zanimivimi geometrijskimi lastnostmi. Obravnavajmo $L \in \{L_0, L_1, L_2\}$, kjer je

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Če postavimo $n = N_L + N_D + N_M$, je vsaka od matrik L_i torej dimenzij $(n - i) \times n$. Reši:

- a) Najdi primerno matriko A , ki bo zadoščala (4).
- b) Denimo, da so točke x_j , v katerih poznamo/želimo poznati vrednosti $f(x_j)$, ekvidistantne. Dokaži, da za rešitev y problema (5) velja:
 - i) če je $L = L_0$, potem je y_M ničelni vektor,
 - ii) če je $L = L_1$, potem predstavlja y_M linearno interpolacijo med zadnjo vrednostjo y_L in prvo vrednostjo y_D (glej sliko 2),
 - iii) če je $L = L_2$, potem predstavlja y_M kvadratno interpolacijo med zadnjima dvema vrednostma y_L in prvima dvema vrednostma y_D , če taka interpolacija obstaja (kvadratni polinom je določen že s tremi točkami).

Dokaži, da zgornje tri točke veljajo neodvisno od izbire parametra α .



Slika 2: Rešitev v primeru, ko smo izbrali $L = L_1$.

Rešitev: Matriko A sestavimo po blokih in definiramo

$$A = \begin{bmatrix} I_{N_L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{N_D} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

kjer je I_k identična matrike razsežnosti $k \times k$. Za rešitev drugega dela naloge si za začetek natančneje oglejmo normo vektorja

$$\begin{bmatrix} Ay^* - b \\ \alpha Ly^* \end{bmatrix},$$

kjer smo z y^* označili rešitev za (5). Iz definicije (6) matrike A je razvidno, da y_M vpliva zgolj na člene vektorja, ki jih porodi αLy . Iz tega tudi sledi, da je veljavnost točk i–iii neodvisna od parametra α . Dokazali jih bomo tako, da privzamemo, da dela rešitve y_L^* in y_D^* že poznamo, poiskati pa moramo še y_M^* , za katerega velja

$$\left\| L \begin{bmatrix} y_L^* \\ y_M^* \\ y_D^* \end{bmatrix} \right\|_2 = \min_{y_M} \left\| L \begin{bmatrix} y_L^* \\ y_M \\ y_D^* \end{bmatrix} \right\|_2.$$

Videli bomo, da tak y_M^* zadošča pogojem pri i–iii. Obravnavajmo sedaj vse tri primere $L = L_i$, $0 \leq i \leq 2$.

Če je $L = L_0$, potem je $Ly = y$ in bo

$$\min_{y_M} \left\| L \begin{bmatrix} y_L^* \\ y_M \\ y_D^* \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|y_L^*\|_2^2 + \|y_D^*\|_2^2 + \min_{y_M} \|y_M\|_2^2,$$

torej je $y_M^* = 0$ in točka i) je dokazana.

Če je $L = L_1$, potem je

$$L \begin{bmatrix} y_L^* \\ y_M \\ y_D^* \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ -y_0 + y_1 \\ -y_1 + y_2 \\ \vdots \\ -y_{N_M-1} + y_{N_M} \\ -y_{N_M} + y_{N_M+1} \\ \vdots \end{array} \right\} \clubsuit, \quad (7)$$

pri čemer smo j -to komponento vektorja y_M označili z y_j , $1 \leq j \leq N_M$. Z y_0 in y_{N_M+1} smo po vrsti označili zadnjo komponento vektorja y_L^* in prvo komponento vektorja y_D^* . Opazimo, da y_M vpliva le na komponente vektorja (7), označene z $\clubsuit$. Vpeljimo števila $\beta_j = -y_{j-1} + y_j$ in jih zložimo v vektor β . Najti moramo torej y_M^* , pri katerem je dosežen $\min_{\beta} \|\beta\|$. Opazimo, da velja

$$\sum_{j=1}^{N_M+1} \beta_j = y_{N_M+1} - y_0 = c$$

za neko konstanto c , ki je neodvisna od y_M . Zgornje je tudi edini pogoj, ki mu mora neki β zadoščati, da lahko iz njega potem dobimo ustrezno rešitev y_M . Če vpeljemo $\mathbf{1}$ kot vektor samih enic, velja

$$\langle \mathbf{1}, \beta \rangle \leq \|\beta\| \|\mathbf{1}\|,$$

torej smo našli spodnjo mejo za $\|\beta\|$. Dosežena bo takrat, ko bo β vzporeden z $\mathbf{1}$, tj. ko bodo vsa števila β_j enaka. To pa pomeni, da so prirastki $y_j - y_{j-1}$ enaki. Ker so točke ekvidistante, je stvar dokazana.

Če je $L = L_2$, postopamo podobno.

Opombe: Vse skupaj se da posplošiti tudi na matrike L_i , $i > 2$. Spomniti se moramo samo formul za numerične ocene odvodov v ekvidistantnih točkah. Matriki L_1 in L_2 namreč po vrsti ustrezata približku za prvi in drugi odvod, če ju izračunamo kot

$$f'(x_j) \doteq \frac{f(x_j) - f(x_{j-1}))}{h} \quad \text{in} \quad f''(x_j) \doteq \frac{f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1}))}{h^2}.$$

Še nadaljnje posplošitve najdemo v [3].

Naloga 3. Nekaterim točkam T_i , $1 \leq i \leq n$, smo koordinate izmerili zelo natančno, nekaterim pa malo manj. Točke prve skupine, recimo jim *fiksne*, naj imajo indekse $i \leq n_F$, točke druge skupine pa $n_F < i \leq n$. Poleg koordinat smo izmerili še nekatere razdalje $d_{ij} = \|T_i - T_j\|_2$, pri čemer lahko predpostavimo, da vsaj ena od točk T_i in T_j pripada drugi skupini. Ker razdalje morda niso natančne in smo jih izmerili preveč (položaj točke bo natanko določen še s tremi), bi radi točke druge skupine razporedili tako, da se bodo izmerjene razdalje čimbolj prilegale izračunanim.

Reši predoločen sistem razporejanja točk po metodi posplošenih najmanjših kvadratov.

Rešitev: Naj bo I množica vseh parov (i, j) , za katere je znana razdalja d_{ij} . Definiramo funkcijo $F : \mathbb{R}^{2(n-n_F)} \rightarrow \mathbb{R}^{|I|}$, ki za argument sprejme vektorja x - in y -koordinat premičnih točk ($\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$) in vrne $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{(i,j) \in I}$, kjer je

$$f_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - d_{ij}^2.$$

Iščemo tiste koordinate $\mathbf{x}^*$ in $\mathbf{y}^*$, pri katerih je dosežen $\min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|$. Nalogo rešimo z Gauss-Newtonovo iteracijo, torej si izberemo začetni približek $\mathbf{w}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ in na k -tem koraku minimiziramo

$$\|F(\mathbf{w}_k) + J_F(\mathbf{w}_k)\Delta\mathbf{w}_k\|,$$

kjer je $J_F(\mathbf{w})$ Jacobijeva matrika funkcije F točki $\mathbf{w}$. Izračunamo jo dokaj preprosto, saj je dovolj poznati tiste od odvoda

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_i}, \quad \text{in} \quad \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_j},$$

pri katerih je $i > n_F$ in $j > n_F$. Zgornje odvode je lahko izračunati. Naslednji približek dobimo po pravilu

$$\mathbf{w}_{k+1} = -J_F^+(\mathbf{w}_k)F(\mathbf{w}_k).$$

Opombe: Nalogo smo s pomočjo Octava rešili v primeru, ko so fiksne točke razporejene v pravilni n_F -kotnik, premične točke pa leže v njegovi notranjosti.

Naloga 4. Pokaži, da za poljubno $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ obstajata semipozitivno definitna (spd) matrika P ter unitarna matrika Q , za kateri velja $A = UP$. Dodatno pokaži, da je tak razcep enoličen v primeru, ko je A obrnljiva.

Pomagaj si z zvezo $A = U\Sigma V^H$.

Rešitev: Najprej poskusimo najti iskani P . Ker je matrika Σ edina, za katero vemo, da je spd, poskušamo najti njej podobno, saj bo imela iste lastne vrednosti. Iz razcepa $A = U\Sigma V^H$ sledi, da je naravni kandidat $P = V\Sigma V^H$, torej mora biti $Q = UV^H$. Hitro preverimo, da je to iskani razcep. Če je A obrnljiv, je obrnljiva tudi $A^H A$. Denimo, da smo našli razcepa $A = Q_i P_i$ za $i \in \{1, 2\}$. Iz unitarnosti Q_i sledi, da je

$$A^H A = P_1^2 = P_2^2.$$

Tu se spomnimo na Algebro 1 in dejstvo, da je kvadratno korenjenje dobro definirana funkcija za spd matrike. Res: P^2 in P imata iste lastne podprostore in sta preko iste (unitarne) podobnostne transformacije W podobna neki diagonalni matriki. Če je torej $P^2 = W\Lambda W^H$, potem mora biti $P = W\sqrt{\Lambda}W^H$, kjer so na diagonalni matrike $\sqrt{\Lambda}$ (pozitivni) koreni lastnih vrednosti matrike P^2 .

Sledi torej, da je $P_1 = P_2$. Ker sta to obrnljivi matriki, velja še $U_1 P_1 = U_2 P_2 \Rightarrow U_1 = U_2$.

5 Vaje 22. 3. 2017

Če ni drugače omenjeno, bo do nadaljnjega matrika $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Definirajmo tudi *spekter* $\sigma(A)$ matrike A kot množico vseh lastnih vrednosti matrike A .

Naloga 1. Dokaži, da v primeru, ko je λ večkratna lastna vrednost matrike A , vedno obstajata levi lastni vektor y in desni lastni vektor x , ki sta pravokotna.

Rešitev: Ločimo dva primera. Denimo najprej, da je $\dim \ker(A - \lambda I) > 1$. Izberimo si neki desni lastni vektor x . Ker je dimenzija levega lastnega podprostora za λ vsaj dva in je $\dim\{x\}^\perp = n - 1$, je presek teh dveh prostorov netrivialen, zato si lahko izberemo neki levi lastni vektor $y \neq 0$ iz tega preseka. Torej je $y^H x = 0$.

V primeru, ko je $\dim \ker(A - \lambda I) = 1$, moramo postopati drugače. Zapišemo A v Jordanovi bazi, tj. $A = SJS^{-1}$, kjer so stolpci S desni lastni in korenski vektorji matrike A . Brez škode privzamemo, da lastni vrednosti λ pripada prva kletka v J , in njeno dimenzijo označimo s k . Z y označimo k -to vrstico matrike S^{-1} . Hitro preverimo, da je $yA = \lambda y$, pri čemer že med izračunom opazimo $yx = 0$. Velja torej, da je stolpec y^H levi lastni vektor za λ , ki je pravokoten na x .

Opombe: Ker je občutljivost enostavne lastne vrednosti definirana kot $1/y^H x$, kjer sta x in y pripadajoča normirana lastna vektorja (desni in levi), sledi, da je res smiselno definirati občutljivost večkratne lastne vrednosti kot ∞ .

Naloga 2. Dokaži Geršgorinov izrek, ki pravi, da lastne vrednosti matrike A leže v uniji zaprtih krogov $\cup_i K_i$, kjer je središče kroga K_i v a_{ii} , njegov polmer pa $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Rešitev: Izberimo si neko lastno vrednost λ in pripadajoč lastni vektor x . Enakost $Ax = \lambda x$ zapišemo po komponentah. Za vsak i tako velja

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji}x_j.$$

Radi bi osamili izraz $\lambda - a_{ii}$ na levi, tj. delili z x_i . To smemo storiti, če izberemo tisti I , za katerega je $|x_I| = \max_i |x_i| = \|x\|_\infty$. Sledi

$$|\lambda - a_{II}| = \left| \sum_{j \neq I} a_{jI} \frac{x_j}{x_I} \right| \leq \sum_{j \neq I} |a_{jI}| \left| \frac{x_j}{x_I} \right| \leq \sum_{j \neq I} |a_{jI}| = r_I,$$

torej je λ za največ r_I oddaljena od središča kroga K_I , s čimer je stvar dokazana.

Naloga 3. Z uporabo Geršgorinovega izreka podaj oceno za območje, v katerem leži spekter matrike

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 1/2 \\ 3/2 & -3 & 20 \end{bmatrix}.$$

Dodatno najdi optimalno diagonalno matriko

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & k \end{bmatrix},$$

pri kateri dobiš najnatančnejšo oceno za tretjo lastno vrednost. Pri tem lahko uporabiš različico izreka iz naloge 2.

Rešitev: Upoštevamo, da lahko Geršgorinov izrek uporabimo tako za A kot A^T , tj. po vrsticah in po stolpcih. Pri drugem delu upoštevamo, da je $\sigma(A) = \sigma(QAQ^{-1})$. Rešitev je tako ista kot v [2]. Dodajmo pa še, da je $\sigma(A) = \{8, 12, 20\}$.

Opombe: Pri delu naloge s Q je treba biti previdnejši, kot se zdi. Kot smo videli, so dopustni k -ji tisti, za katere je $|k| \in (a, b)$, kjer sta krajšči a in b rešitvi kvadratne enačbe. Za optimalni $k > 0$ tako ne smemo takoj vzeti kar $k = a$, saj se takrat krog, v katerem je λ_3 , ravno stakne s preostalima dvema. Dokazati je treba še: če je $|\lambda_3 - \tilde{a}_{33}| \leq r_{\text{OPT}} + \varepsilon$ za vse $\varepsilon > 0$, potem je tudi $|\lambda_3 - \tilde{a}_{33}| \leq r_{\text{OPT}}$. (Vpeljali smo $\tilde{a}_{33} = (QAQ^{-1})_{33}$.)

Naloga 4. Močnejša različica Gerš. izreka pove naslednje: v vsaki povezani komponenti unije krogov iz naloge 2, je natanko toliko lastnih vrednosti, kolikor krogov jo tvori.

Rešitev: Ideja rešitve temelji na [2]. Opazujemo matriko

$$M(t) = (1 - t)D + tA$$

za $t \in [0, 1]$, kjer je D diagonalna matrike A . Lastne vrednosti matrike $M(t)$ označimo z $\lambda_j(t)$. Slednje se spreminjajo zvezno s t , saj so ničle karakterističnega polinoma matrike M , katerega koeficienti se zvezni v t . Hitro se vidi, da je $K_i(t)$ krog s središčem v a_{ii} ter polmerom tr_i , kjer je r_i polmer kroga $K_i(1)$, tj. i -tega kroga za matriko A , zato je

$$t_1 < t_2 \Rightarrow K_i(t_1) \subsetneq K_i(t_2). \quad (**)$$

.

Izrek dokažemo, če pokažemo, da je v vsaki komponenti vsaj toliko lastnih vrednosti, kolikor krogov jo tvori. Prav tako lahko dokažemo izrek za poljubno unijo komponent, ne le eno.

Izberimo si torej k krogov $K_i(1)$, $i \in I$, ki so disjunktni s preostalimi, tj. $k = |I|$, množici $\mathcal{U}_1(t) = \cup_{i \in I} K_i(t)$ in $\mathcal{U}_2(t) = \cup_{i \notin I} K_i(t)$ pa sta disjunktni pri $t = 1$ in zato pri vseh t zaradi (**). Za vsako lastno vrednost $\lambda_j(t)$ definiramo

$$f_j(t) = \max_{i \in I} tr_i - |\lambda_j(t) - a_{ii}|,$$

torej imamo $f_j(t) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_j(t) \in \mathcal{U}_1(t)$. Radi bi dokazali, da obstaja k lastnih vrednosti $\lambda_j(1)$, za katere je $f_j(1) \geq 0$. To bomo storili za vse $t \in [0, 1]$.

Za $t = 0$ take lastne vrednosti obstajajo, njihovi indeksi so kar elementi množice I , saj je $K_i(0) = \{a_{ii}\} = \{\lambda_i(0)\}$. Definirajmo še $F(t) = \min_{j \in I} f_j(t)$. Če je $F(t) < 0$, to pomeni, da je neka lastna vrednost, ki je bila v $\mathcal{U}_1(0)$, ušla v $\mathcal{U}_2(t)$.

Zadošča dokazati, da je $F \geq 0$ na vsem intervalu $[0, 1]$. Denimo, da to ne drži za neki $t > 0$. Naj bo t_0 največji tak t , za katerega velja, da je $F(s) \geq 0$ za vse $s \in [0, t]$. Tak t obstaja, ker je F zvezna funkcija, $[0, 1]$ pa kompakten. Sledi $t_0 \in [0, 1)$, torej obstajata $\varepsilon > 0$ in $j \in I$, za katera je

$$t_0 + \varepsilon < 1 \quad \text{in} \quad \forall s \in (t_0, t_0 + \varepsilon]. \quad f_j(s) < 0.$$

Torej na intervalu $(t_0, t_0 + \varepsilon]$ velja tudi

$$d(\mathcal{U}_2(s), \lambda_j(s)) = 0$$

in ker je $\mathcal{U}_2(t)$ kompaktna, to pomeni $\lambda_j(s) \in \mathcal{U}_2(s)$. Ker je razdalja d zvezna, lahko zato sklepamo

$$\lim_{s \searrow t_0} d(\mathcal{U}_2(s), \lambda_j(s)) = 0 = d(\mathcal{U}_2(t_0), \lambda_j(t_0)),$$

kar pa ne more veljati, saj je $\mathcal{U}_1(t_0) \cap \mathcal{U}_2(t_0) = \emptyset$ in $\lambda_j(t_0) \in \mathcal{U}_1(t_0)$.

Opombe: Še močnejše različice *Vsak krog K_i vsebuje eno lastno vrednost* ni mogoče dokazati. Preprost primer za to je družina matrik

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ter $|a| \neq |b|$. Če je npr. $|a| < |b|$, lahko hitro preverimo, da je

$$|a| < |\lambda_{1,2}| = \sqrt{|ab|} < |b|,$$

torej krog $K_1 = \mathcal{K}(0, |a|)$ ne vsebuje nobene lastne vrednosti.

6 Vaje 29. 3. 2017

Naloga 1. (Vir navdiha: vprašanje na vajah, zaradi katerega smo tudi dodali opombo pri nalogi 4) z vaj 5) Naj bodo A, B, C in D neodvisne slučajne spremenljivke, vse porazdeljene enakomerno zvezno na intervalu $[0, 1]$. Kakšna je verjetnost, da kateri izmed Geršgorinovih krogov matrike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ne vsebuje nobene lastne vrednosti matrike M ?

Rešitev: Najprej izračunamo lastni vrednosti matrike M :

$$\lambda_1 = \frac{(A+D) + \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}}{2} \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \frac{(A+D) - \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}}{2}.$$

Označimo Geršgorinova kroga s $K_1 = \mathcal{K}(A, B)$ in $K_2 = \mathcal{K}(D, C)$. Iskana verjetnost p je tako enaka

$$p = P(\lambda_1 \notin K_1 \wedge \lambda_2 \notin K_1) + P(\lambda_1 \notin K_2 \wedge \lambda_2 \notin K_2) =: p_1 + p_2.$$

Ker A in D oz. B in C nastopata povsem simetrično, je očitno, da je $p_1 = p_2$, torej je $p = 2p_1$. Računanje p_1 prevedemo na

$$\begin{aligned} p_1 &= P(\lambda_1 \notin K_1 \wedge \lambda_2 \notin K_1) \\ &= 1 - P(\lambda_1 \in K_1 \vee \lambda_2 \in K_1) \\ &= 1 - [P(\lambda_1 \in K_1) + P(\lambda_2 \in K_1) - P(\lambda_1 \in K_1 \wedge \lambda_2 \in K_1)] \\ &=: 1 - (p_3 + p_4 - p_5). \end{aligned}$$

Poznati moramo torej pogoje $\lambda_i \in K_j$. Preden jih izpeljemo, opozorimo, da sta obe lastni vrednosti realni in da velja

$$|A - D| \leq \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}. \quad (**)$$

Označimo diskriminanto z d . Pogoj $\lambda_1 \in K_1$ pomeni $|\lambda_1 - A| \leq B$, torej

$$|D - A + \sqrt{d}| \leq 2B,$$

kar je zaradi $(**)$ in $|D - A + \sqrt{d}| = D - A + \sqrt{d}$ ekvivalentno

$$d \leq (2B + (A - D))^2 \quad \wedge \quad 2B - (D - A) \geq 0.$$

Iz tega po preoblikovanju prvega izraza (med drugim krajšamo z B , kar lahko storimo, saj to ne bo vplivalo končni rezultat) dobimo

$$C + D \leq A + B \quad \wedge \quad 2B \geq D - A. \quad (\clubsuit_1)$$

Pogoj $\lambda_2 \in K_1$ prepišemo v

$$|D - A - \sqrt{d}| \leq B.$$

Ker je $|D - A - \sqrt{d}| = \sqrt{d} - D + A$, sta se vlogi A in D glede na prejšnji primer ravno zamenjali, torej dobimo

$$C + A \leq D + B \quad \wedge \quad 2B \geq A - D. \quad (\clubsuit_2)$$

Za pogoja $\lambda_1 \in K_2$ ($\clubsuit_3$) in $\lambda_2 \in K_2$ ($\clubsuit_4$) opazimo, da sta taka kot $\clubsuit_{1,2}$, le da opravimo zamenjavi $A \leftrightarrow D$ in $B \leftrightarrow C$. Dobimo torej

$$B + A \leq D + C \quad \wedge \quad 2C \geq A - D \quad (\clubsuit_3)$$

in

$$B + D \leq A + C \quad \wedge \quad 2C \geq D - A \quad (\clubsuit_4)$$

S tem smo ponovno utemeljili dejstvo $p_1 = p_2$, prav tako pa lahko iz $\clubsuit_1$ in $\clubsuit_2$ sklepamo $p_3 = p_4$, saj sta pogoja povsem simetrična. Najti moramo torej še, recimo, p_3 in p_5 . Začnimo s p_3 . Na vajah se je naloga tu končala, saj nismo dobili ideje, kako na hitro izračunati iskane verjetnosti, prav tako pa se je poskus izračunati omenjene verjetnosti s pomočjo Mathematice klavrno končal, ko nismo odkrili, kje se je asistent zatipkal. Sledi popolna rešitev.

Izkaže se, da se izplača vpeljati $U = D - A$ ter pogoj $\clubsuit_1$ preoblikovati v

$$C + U \leq B \quad \wedge \quad 2B \geq U,$$

a moramo sedaj ugotoviti, kako je porazdeljena sl. spr. U . Vemo, da je $U \in [-1, 1]$, zato za u s tega intervala za izračunamo

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} P(U < u) \\ &= \frac{d}{du} P(D < A + u) \\ &= \frac{d}{du} \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(1 - u)^2 & ; u \geq 0 \\ \frac{1}{2}(1 + u)^2 & ; u \leq 0 \end{cases} \\ &= 1 - |u|. \end{aligned}$$

Preostale gostote so identično enake 0. Če je zadoščeno prvi neenakosti pri $\clubsuit_1$, potem je tudi drugi, zato lahko drugo kar pozabimo. Sedaj lahko izračunamo p_3 . Integral po območju, ki ga določa $\clubsuit_1$, bomo razdelili na I_1 oz. I_2 , kjer je U manjša oz. večja od nič. Dobimo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^0 f_U(u) du \left(\int_0^{-u} dc \int_0^1 db + \int_{-u}^1 dc \int_{c+u}^1 db \right) \\ &= \int_{-1}^0 f_U(u) du \left(-u + \int_{-u}^1 (1 - c - u) dc \right) \\ &= \int_{-1}^0 f_U(u) \left(-u + (1 - u)(1 + u) - \frac{1}{2}(1 - u^2) \right) du \\ &= \int_{-1}^0 (1 + u) \left(-u + 1/2 - \frac{1}{2}u^2 \right) du \\ &= \frac{3}{8} \\ I_2 &= \int_0^1 f_U(u) du \int_0^{1-u} dc \int_{0c+u}^1 db \\ &= \int_0^1 (1 - u) du \int_0^{1-u} (1 - c - u) dc \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Torej je $p_3 = p_4 = 1/2$. Videti je, da je p_5 nekoliko težje izračunati, a pogoj $\clubsuit_1 \wedge \clubsuit_2$ lahko zapišemo kot

$$C + |U| \leq B \quad \wedge \quad 2B \geq |U|,$$

torej moramo izračunati gostoto za $W = |U|$. Tudi sedaj velja, da je, če velja prvi pogoj,

tudi drugi izpolnjen. Za $w \in [0, 1]$ velja

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{d}{dw} P(W < w) \\ &= \frac{d}{dw} P(-w < U < w) \\ &= \frac{d}{dw} \int_{-w}^w (1 - |u|) du \\ &\stackrel{*}{=} 2(1 - w), \end{aligned}$$

kjer smo pri $*$ upoštevali simetričnost meja in f_U . Sedaj izračunamo

$$\begin{aligned} p_5 &= \int_0^1 f_W(w) dw \int_0^{1-w} dc \int_{c+w}^1 db \\ &= \int_0^1 f_W(w) dw \int_0^{1-w} (1 - c - w) dc \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Iskana verjetnost je torej enaka

$$p = 2p_1 = 2(1 - 2p_3 + p_5) = 2 \left(1 - \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

Opombe: Slepno računanje ni vedno najboljša pot. Ko enkrat pridemo do pogojev $\clubsuit_{1,2,3,4}$ in opazimo, da je $\clubsuit_{2i}$ posledica $\clubsuit_{2i-1}$, potem lahko takoj opazimo, da je $p_3 = 1/2$, saj morata biti dogodka $C + D \leq A + B$ in $C + D \geq A + B$ enako verjetna.

Naloga 2. Dokaži naslednji posledici Geršgorinovega izreka:

- $|\lambda| \leq \|A\|_\infty$
- Če je A strogo diagonalno dominantna, tj. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ za vse i , potem je obrnljiva.

Rešitev: Za prvi del zapišemo $|\lambda| - |a_{ii}| \leq |\lambda - a_{ii}| \leq r_i$ in prištejemo neenakosti $|a_{ii}|$, medtem ko pri drugem upoštevamo

$$|\lambda| = |\lambda - a_{ii} + a_{ii}| \geq |a_{ii}| - |\lambda - a_{ii}| \geq |a_{ii}| - r_i > 0.$$

Opombe: Kot smo se spomnili, prva točka velja za splošno matrično normo.

Naloga 3. Dokaži, da za QR-iteracijo brez premikov velja, da je

$$A^k = Q_0 Q_1 \cdots Q_{k-1} R_{k-1} R_{k-2} \cdots R_0.$$

Rešitev: Upošteva je zvezi $A_k = Q_k R_k = R_{k-1} Q_{k-1}$, smo desno stran izraza v nekaj korakih predelali v levo. Začnemo s produktom $Q_{k-1} R_{k-1}$, ki ga nadomestimo z $A_{k-1} = R_{k-2} Q_{k-2}$ in postopek ponavljamo.

Opombe: Nalogo je mogoče neposredno rešiti tudi z indukcijo.

Naloga 4. Če obdržimo oznako r_i iz Geršgorinovega izreka, so Cassinijevi ovali C_{ij} za matriko A definirani kot

$$C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| |z - a_{jj}| \leq r_i r_j\}.$$

Dokaži, da je $\sigma(A) \subseteq \cup_{ij} C_{ij}$.

Rešitev: Ločili smo primera, ko ima lastni vektor x za izbrano l. vr. λ zgolj eno neničelno komponento in ko ima vsaj dve. V prvem primeru smo pokazali, da je potem λ enaka nekemu diagonalnemu elementu matrike A , v drugem primeru pa smo (prav tako) sledili rešitvi v [2].

7 Vaje 5. 4. 2017

Naloga 1. Izpelji učinkovit algoritem za prevedbo simetrične matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ na njej podobno Hessenbergovo $\equiv$ tridiagonalno matriko. Podobnostna transformacija naj temelji na Householderjevih zrcaljenjih.

Rešitev: Najprej smo se spomnili, da je matrika, ki pripada (Householderjevemu), ortogonalna in oblike $H_w = I - \alpha_w w w^T$ za neki vektor w in $\alpha_w = 2/w^T w$. Očitno je tudi $H_w = H_w^T$. S predavanj vemo, da bodo podobnostne transformacije, ki jih uporabljamo, oblike

$$\overline{H}_w = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H_w \end{bmatrix},$$

kjer je I_k identična matrika reda k . Izhajamo iz psevdokode za splošno matriko A , pri čemer v vrstici 4 že upoštevamo simetričnost A .

Algoritem 1 Hessenberg(A)

- | | |
|--|--------|
| 1: for $i = 1, 2, \dots, n-2$ do | |
| 2: določi w iz $A[i+1:n, i]$ | hitro |
| 3: $\alpha_w \leftarrow 2/w^T w$ | hitro |
| 4: $A[i+1:n, i] \leftarrow H_w A[i+1:n, i]$ | hitro |
| 5: $A[i+1:n, i+1:n] \leftarrow H_w A[i+1:n, i+1:n] H_w$ (le spodnji trikotnik) | počasi |
-

V vsaki ponovitvi zanke koraki v vrsticah 2–4 skupaj zahtevajo le $\mathcal{O}(n-i)$ časa, zato jih izvedemo *hitro*. Vrstica 5 zahteva $\mathcal{O}((n-i)^2)$ časa, zato lahko pri nadaljnji obravnavi optimiziramo le slednjo, saj se kvadratne časovne zahtevnosti nikakor ne moremo znebiti, ker je treba posodobiti $\mathcal{O}((n-i)^2)$ vrednosti. Označimo $B_i = A[i+1:n, i+1:n]$.

Ker je A simetrična matrika, morda pridemo na misel, bi privarčevali polovico korakov tako, da

- bi izračunali le spodnji trikotnik matrike $H_w B_i$ in
- iz tega izračunali spodnji trikotnik $H_w B_i H_w$.

Žal ga je tu asistent polomil, saj $H_w B_i$ ni simetrična! Še enkrat tu opomnimo, da za simetrični matriki X in Y velja, da je tudi XY simetrična, natanko tedaj, ko X in Y komutirata, saj je

$$(XY)^T = X^T Y^T = YX.$$

(Hitra "utemeljitev" simetričnosti $H_w B_i$ iz rokava, s katero so bili študentje speljani na tanek led, ni bila vredna piškavega oreha, ker je v resnici pokazala le, da je $(H_w x)^T = x^T H_w$ (x je tu eden od stolpcev/transponiranih vrstic sim. matrike B_i), kar tako ali tako velja.)

Za učinkovitejši izračun v vrstici 5 imamo dve možnosti: lahko izpeljemo, kakšni so posodobljeni elementi podmatrike B_i , še učinkovitejši je pa naslednji računski trik, vzet iz [8]. Vpeljimo vektorja

$$p = \frac{2}{w^T w} B_i w \quad \text{in} \quad r = p - \frac{p^T w}{w^T w} w.$$

Upošteva je definicijo H_w in simetričnost B_i se lahko z neposrednim računom prepričamo, da velja

$$H_w B_i H_w = B_i - (wr^T + rw^T). \quad (8)$$

Preštejmo korake. Da bi dobili $B_i w$, moramo izračunati $(n-i)$ skalarnih produktov, torej opravimo skupaj $2(n-i)^2 + \mathcal{O}(1)$ operacij (s simetričnostjo B_i si tu ne moremo pomagati). Da bi dobili vektorja p in r v celoti, potrebujemo še $\mathcal{O}(n-i)$ korakov, kar se ne bo poznalo pri vodilnem členu v časovni zahtevnosti.

Matrika $wr^T + rw^T$ je simetrična, torej je dovolj izračunati spodnji trikotnik (vključno z diagonalo) in ga odšteti od spodnjega trikotnika B . To opravimo v

$$\underbrace{\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}}_{\text{št. členov}} \left(1 + \underbrace{1+1+1}_{\text{množenji in seštevanje}}\right) = 2(n-i)^2 + \mathcal{O}(n-i)$$

korakih. Skupaj torej za $H_w B H_w$ potrebujemo približno $4(n-i)^2$ korakov. Ko to seštejmo po vseh iteracijah, dobimo

$$\begin{aligned} \text{število korakov} &\sim \sum_{i=1}^{n-2} 4(n-i)^2 \\ &= 4 \sum_{j=2}^{n-1} j^2 \\ &= 4 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 4 \cdot 1 \\ &\sim \frac{4}{3} n^3, \end{aligned}$$

kjer smo dvakrat zanemarili člene nižjega reda in upoštevali, da k vodilnemu členu prispeva le računanje $H_w B H_w$. Relacija $\sim$ med zaporedjema a in b je definirana kot $a \sim b$ natanko tedaj, ko je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$.

Opombe: Spomnimo se, da potrebujemo za prevedbo na Hessenbergovo obliko v splošnem $10n^3/3$, tj. več kot dvakrat več operacij.

8 Vaje 12. 4. 2017

Naloga 1. Dana je simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Pod kakšnim kotom se sekata krožnici, določeni z enačbama $\rho(x, A) = \lambda_2$ in $\|x\|_2 = 1$? Kdaj sta pravokotni? Z ρ smo označili Rayleighov koeficient.

Rešitev: Rešitev za prvi del je enaka kot v [2]. Dobimo

$$\cos \varphi = \frac{2\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3}.$$

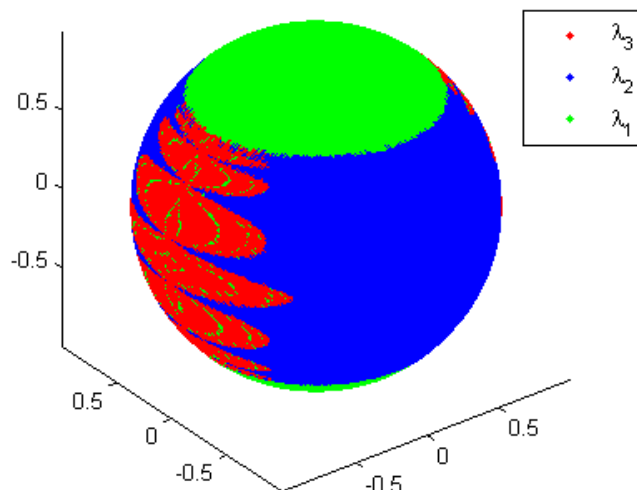
Torej bosta krožnici pravokotni takrat, ko λ_i tvorijo aritmetično zaporedje.

Opombe: V to, da sta rešitev danih enačb res dve krožnici, se lahko prepričamo tako, da rešitev zavrtimo okoli osi y (v lastni bazi matrike A), tako da bo parametrizacija rešitve $r(t) = (t, \pm\sqrt{1-t^2}, 0)$. Krožnicama pripadata različni rotaciji.

S pomočjo Matlabu smo se prepričali še, da v primeru, ko prvo enačbo nadomestimo s splošnejšo $\rho(x, A) = c$, $c \in [\lambda_3, \lambda_1]$, krivulji, ki ju dobimo, nista ravninski niti se ne sekata. Pri $c \in \{\lambda_1, \lambda_3\}$ sta rešitev zgolj točki.

Naloga 2. S pomočjo Matlabovega programa, ki ga je prispeval prof. Plestenjak, razišči, h kateri od lastnih vrednosti simetrične 3×3 matrike skonvergiramo z Rayleighovo iteracijo, če vzamemo neki vektor z enotske sfere.

Rešitev: Opazili smo, da dobimo kar zanimive slike. V primeru, ko imamo lastne vrednosti $\sigma(A) = \{-2, 0, 100\}$ dobimo podobo s slike 3.



Slika 3: Lastna vrednost, h kateri konvergira $x \in S^2$.

Opombe: Če skripta, s katerimi smo dobili sliko 3, nekoliko popravimo, tako da popravimo z -koordinate točk na αz , $\alpha > 1$, dobimo pri različnih spektrih čudovite ideje za pirhe.

Naloga 3. (Relativni Weylov izrek) Če ima simetrična matrika A lastne vrednosti $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ in ima matrika $X^T A X$, kjer je X obrnljiva, lastne vrednosti $\hat{\lambda}_1 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n$,

potem za vse i velja

$$|\hat{\lambda}_i - \lambda_i| \leq \lambda_i \|X^T X - I\|_2.$$

Rešitev: Problem poskušamo prevesti na že znani izrek, ki pravi, da za matriko A kot zgoraj in simetrično matriko $A + E$ z lastnimi vrednostmi $\hat{\lambda}_i$ velja

$$|\hat{\lambda}_i - \lambda_i| \leq \|E\|_2. \quad (9)$$

Prva izbira so bile $X^T A X$, A in motnja $\lambda_i(X^T X - I)$, vendar nismo znali nadaljevati. Zato smo levo stran neenakosti, ki jo skušamo dokazati, interpretirali kot $|(\hat{\lambda}_i - \lambda_i) - 0|$.

Očitno je i -ta lastna vrednost matrike $X^T A X - \lambda_i I$ enaka $\hat{\lambda}_i - \lambda_i$ (**). Ta izraz dopolnimo tako, da bomo vključili še starega kandidata za motnjo:

$$\begin{aligned} X^T A X - \lambda_i I &= X^T A X - \lambda_i I + \lambda_i(X^T X - I) \\ &= X^T(A - \lambda_i I)X + \lambda_i(X^T X - I) \\ &= \tilde{A} + \tilde{E} \end{aligned}$$

Matrika $\tilde{A} = X^T(A - \lambda_i I)X$ ima po Sylvestrovem izreku i -to lastno vrednost enako 0. Upoštevamo (**) ter vstavimo $\tilde{A}$ in $\tilde{E}$ v (9).

Naloga 4. Naj bo T simetrična matrika. Spomnimo se, kako poteka QR-iteracija.

Algoritem 2 QR-iteracija(T)

- 1: $T_k \leftarrow T$
 - 2: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 3: $T_k - \sigma_k I \leftarrow Q_k R_k$
 - 4: $T_{k+1} \leftarrow R_k Q_k + \sigma_k I$
-

Dokaži, da velja

- a) $T_{k+1} = U_k^T T U_k$,
- b) $(T - \sigma_0 I)(T - \sigma_1 I) \cdots (T - \sigma_k I) = U_k S_k$,

kjer je

$$U_k = Q_0 Q_1 \cdots Q_k \quad \text{in} \quad S_k = R_k R_{k-1} \cdots R_0.$$

Rešitev: Ker je $R_k = Q_k^T(T_k - \sigma_k I)$, je $T_{k+1} = Q_k^T(T_k - \sigma_k I)Q_k + \sigma_k I = Q_k^T T_k Q_k$. To ponavljamo, dokler ne pridemo do

$$T_{k+1} = Q_k^T Q_{k-1}^T \cdots Q_0^T T_0 Q_0 Q_1 \cdots Q_k.$$

S tem smo dokazali a). Primer b) smo najprej poskušali rešiti brez indukcije in skušali njegovo levo stran preoblikovati v desno, a smo nekje na sredi zaradi kompleksnosti izraza obupali.

Baza indukcije je za $k = 0$ očitno na trdnih temeljih, pri koraku $k \rightarrow k+1$ pa upoštevamo, da matrike $T - \sigma_i I$ komutirajo (**). Računajmo.

$$\begin{aligned}
 (T - \sigma_0 I) \cdots (T - \sigma_{k+1} I) &= U_k S_k [T - \sigma_{k+1} I] \\
 &\stackrel{a)}{=} U_k S_k [U_k T_{k+1} U_k^T - \sigma_{k+1} I] \\
 &= U_k S_k [U_k (Q_{k+1} R_{k+1} + \sigma_{k+1} I) U_k^T - \sigma_{k+1} I] \\
 &= U_k S_k [U_k Q_{k+1} R_{k+1} U_k^T] \\
 &\stackrel{(**)}{=} [U_k Q_{k+1} R_{k+1} U_k^T] U_k S_k \\
 &= U_{k+1} S_{k+1}.
 \end{aligned}$$

9 Vaje 19. 4. 2017

Naloga 1. Izvedi en korak Rayleighove iteracije z matriko

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

in začetnim približkom $z = [c \ s]^T$, za katerega velja $\|z\|_2 = 1$. Predpostavi $\lambda_1 > \lambda_2$ in pokaži, da je konvergenca kubična.

Rešitev: Najprej predpostavimo, da je $|c| > |s|$. Tako kot v zgledu 7.2 v knjigi [1] izračunamo premik $\sigma = z^T A z$ in nato normiramo rešitev sistema $(A - \sigma I)y = z$. Dobimo

$$z = \frac{1}{\sqrt{c^6 + s^6}} \begin{bmatrix} c^3 \\ -s^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + (s/c)^3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -(s/c)^3 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da velja $s/c \rightarrow 0$ in to kubično, kar pomeni, da zaporedje približkov konvergira proti e_1 . V primeru $|c| < |s|$ bi dobili konvergenco k e_2 . Če smo si po nerodnosti izbrali po absolutni vrednosti enaka c in s , potem konvergence ni.

Naloga 2. Napravi nekaj korakov bisekcije za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Rešitev naloge je enaka kot pri 22. nalogi v [2], le da smo začeli z razpolavljanjem intervala $(-\|A\|, \|A\|)$. Izbrali smo si $\|\cdot\|_\infty$, torej je začetni interval enak $(-4, 4]$.

Naloga 3. Dokaži, da je vodilni člen časovne zahtevnosti metode deli in vladaj (DiV) za za simetrično tridiagonalno $n \times n$ matriko T (glej algoritem 3, ki je tak kot 7.2 v [1]) enak

$$\frac{4}{3}n^3.$$

Pomagaj si s časovnimi zahtevnostmi, ki so že podane.

Algoritem 3 DiV(T)

```

1: if  $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  then
2:    $Q \leftarrow 1$ 
3:    $\Lambda \leftarrow A$ 
4: else
5:   razdeli  $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + b_m v v^T$ 
6:    $Q_1, D_1 \leftarrow \text{DiV}(A_1)$ 
7:    $Q_2, D_2 \leftarrow \text{DiV}(A_2)$ 
8:   iz  $Q_{1,2}$  in  $D_{1,2}$  izračunaj  $A' = D + \rho u u^T$ 
9:   izračunaj l. pare  $(\Lambda, Q')$  matrike  $A'$   $\mathcal{O}(n^2)$ 
10:   $Q \leftarrow \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} Q'$   $n^3$ 
11: return  $Q, \Lambda$ 

```

Rešitev: Najprej zapišemo rekurzivno enačbo za časovno zahtevnost $T(n)$ algoritma:

$$T(n) = 2T(n/2) + \mathcal{O}(n^2) + n^3.$$

Po definiciji množice $\mathcal{O}(n^2)$ obstaja $c > 0$, za katero velja

$$T(n) \leq 2T(n/2) + cn^2 + n^3.$$

Lahko izberemo dovolj velik c , da je tudi $T(1) = \mathcal{O}(1) \leq c$, torej lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq cn^2 + n^3 + 2T(n/2) \\
&\leq cn^2 + n^3 + 2(c(n/2)^2 + (n/2)^3 + 2T(n/4)) \\
&\leq cn^2 + n^3 + 2(c(n/2)^2 + (n/2)^3 + 2(c(n/4)^2 + (n/4)^3 + \dots)) \\
&\leq cn^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k + n^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \underbrace{nc}_{nT(1)} \\
&\sim n^3 \frac{1}{1 - 1/4} \\
&= \frac{4}{3}n^3
\end{aligned}$$

Naloga 4. Najdi lastne vrednosti $n \times n$ matrike

$$A_n = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}$$

ob privzetku, da je $bc > 0$.

Rešitev: Na predlog reševalca smo ubrali malo drugačno pot, kot je zapisana v [2]. Zapišemo rekurzivno enačbo za $D_n = \det(A - \lambda I)$. Z razvojem po prvi vrstici dobimo

$$D_n = (a - \lambda)D_{n-1} - bcD_{n-2}. \quad (10)$$

Posebej imamo $D_1 = a - \lambda$. Lahko definiramo $D_0 = 1$, saj z uporabo (10) za $n = 2$, preverimo, da res dobimo $D_2 = (a - \lambda)^2 - bc$. Sedaj lahko najdemo D_n z nastavkom $D_n = \mu^n$. Dobimo kvadratno enačbo

$$\mu^2 - (a - \lambda)\mu + bc = 0,$$

katere rešitvi sta

$$\mu_{1,2} = \frac{(a - \lambda) \pm \sqrt{(a - \lambda)^2 + 4bc}}{2}.$$

Če vpeljemo $\cos \varphi = \frac{a - \lambda}{2\sqrt{bc}}$, se zgornje poenostavi v

$$\mu_{1,2} = \sqrt{bc}(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) = \sqrt{bc} e^{\pm i\varphi},$$

torej je

$$D_n = \sqrt{bc}^n (\alpha e^{in\varphi} + \beta e^{-in\varphi}) \quad (11)$$

za ustrezno izbrana $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dobimo ju s pomočjo

$$D_0 = 1 = \alpha + \beta \quad \text{in} \quad D_1 = a - \lambda = \sqrt{bc}(\alpha e^{i\varphi} + \beta e^{-i\varphi}).$$

Ko rešimo zgornji sistem, dobimo

$$\bar{\alpha} = \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\tan \varphi} + 1 \right).$$

Ker je $D_n \in \mathbb{R}$, mora za lastno vrednost λ veljati $D_n = \text{Re}(D_n) = 0$, torej velja

$$0 = \sqrt{bc}^n \left(\cos(n\varphi) + \frac{\sin(n\varphi)}{\tan(\varphi)} \right),$$

torej je

$$0 = \cos(n\varphi) + \frac{\sin(n\varphi)}{\tan(\varphi)} = \frac{\cos(n\varphi) \sin \varphi + \sin(n\varphi) \cos(\varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin \varphi}$$

Sledi, da je $\varphi = k\pi/(n+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Lastne vrednosti so enake

$$\lambda_k = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{k\pi}{n+1}.$$

Pri tem smo upoštevali $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ (in tako spremenili predznak pred $\cos$). Sedaj je le še vprašanje, katerih n števil k je ustreznih. Za začetek se lahko omejimo zgolj na števila $k \in \{0, 1, \dots, n, n+1\}$, saj s tem dobimo vse možne vrednosti $\cos \frac{k\pi}{n+1}$. Primer $k = 0$ in $k = n+1$ odpadeta, saj je v tem primeru $\sin \varphi = 0$, torej že sam nastavek (11) ni primeren, saj bi v tem primeru morali uporabiti $D_n = (\alpha + \beta n)\mu_1^n$, ker je $\mu_1 = \mu_2$.

Opombe: V rešitvi v [2] najdemo tudi lastne vektorje. Izkaže se, da v primeru, ko je $\varphi \in \{0, \pi\}$, pripadajoči neničeln lastni vektor ne obstaja.

Če bi do determinante D_n prišli brez uporabe $\cos \varphi$, bi se, ko bi obravnavali vse primere, videlo, da za lastno vrednost λ vedno velja $|a - \lambda|/(2\sqrt{bc}) \leq 1$.

10 Vaje 26. 4. 2017

Najprej smo do konca rešili zadnjo nalogo s prejšnjih vaj. Sledile so sveže.

Naloga 1. Pri nalogi 4 na prejšnjih vajah smo privzeli $bc > 0$. Dokaži, da je posplošitev tega pogoja na $b_i c_i > 0$ za realno matriko

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

zadostna, da dokažemo, da je $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Namig: najdi tako matriko P , da je PAP^{-1} simetrična.

Rešitev: Če najdemo ustrezen P , pokažemo, da je matrika A podobna simetrični matriki, za take pa vemo, da imajo vse lastne vrednosti realne. Poskusimo s $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Matrika $\hat{A} = PAP^{-1}$ je tridiagonalna. Označimo njene elemente z $\hat{a}_i$, $\hat{b}_i$ in $\hat{c}_i$. Z neposrednim računom pridemo do zvez

$$\hat{a}_i = a_i \quad \hat{b}_i = p_i p_{i+1}^{-1} b_i \quad \text{in} \quad \hat{c}_i = p_i^{-1} p_{i+1} c_i$$

za vse smiselne i . Ker je $\hat{A}$ simetrična, mora veljati $\hat{b}_i = \hat{c}_i$, $1 \leq i \leq n-1$. Iz zadnjih dveh med gornjimi enakostmi dobimo

$$p_{i+1} = p_i \sqrt{\frac{b_i}{c_i}},$$

torej si lahko poljubno izberemo $p_1 \neq 0$, nato pa preostale p_i rekurzivno izračunamo. Zaradi predpostavke $b_i c_i > 0$ je tudi $b_i/c_i > 0$, torej so števila p_i dobro definirana.

Naloga 2. Za karakteristične polinome f_i vodilnih podmatrik simetrične tridiagonalne matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oblike (12), kjer je $b_i = c_i$, velja rekurzivna zveza

$$f_{i+1}(\lambda) = (a_{i+1} - \lambda)f_i(\lambda) - b_i^2 f_{i-1}(\lambda).$$

Odvajaj jo in ugotovi, koliko računskih operacij je potrebnih za en korak tangentne in Leguerroove metode, s katerima bi poiskali lastne vrednosti matrike A .

Rešitev: Radi bi našli ničle polinoma f_n . Na k -tem koraku imamo približek x_k . Pravili za posodobitev sta

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f_n(x_k)}{f'_n(x_k)}$$

pri tangentni in

$$x_{k+1} = \frac{n f_n(x_k)}{f'_n(x_k) \pm \sqrt{(n-1)[f_n'^2(x_k) - n f_n(x_k) f_n''(x_k)]}}$$

pri Leguerroevi metodi. Radi bi torej rekurzivno izračunali še f'_n in f''_n . Odvajamo rekurzivno zvezo in dobimo

$$f'_{i+1}(\lambda) = (a_{i+1} - \lambda)f'_i(\lambda) - f_i(\lambda) - b_i^2 f'_{i-1}(\lambda)$$

ter

$$f''_{i+1}(\lambda) = (a_{i+1} - \lambda)f''_i(\lambda) - 2f'_i(\lambda) - b_i^2 f''_{i-1}(\lambda).$$

Števila b_i^2 shranimo pred začetkom iteracije. Na vsakem koraku shranimo še $\sim n$ števil $a_{i+1} - x_k$. Tako lahko potem $f_{i+1}^{(j)}(x_k)$ izračunamo v $3 + j$ korakih iz že poznanih vrednosti. Skupaj torej potrebujemo za izračun $f_n(x_k)$ približno $3n$, za $f'_n(x_k)$ približno $4n$ in za $f''_n(x_k)$ približno $5n$ korakov, potem ko smo jih porabili približno n za izračun vseh $a_{i+1} - x_k$.

Pri tangentni metodi moramo izračunati $f_n(x_k)$ in $f'_n(x_k)$, torej izvedemo $\sim n + 3n + 4n = 8n$ operacij. Pri Laguerreovi metodi potrebujemo še $f''_n(x_k)$, torej izvedemo $\sim 13n$ operacij. Pri tem pazimo, da $f_n(x_k)$ in $f'_n(x_k)$ izračunamo samo enkrat.

Naloga 3. (Vir navdiha: [9]) Do podobnih rezultatov, kot smo prišli pri reševanju lastnega problema tridiagonalnih matrik, lahko pridemo pri *puščičnih matrikah* (ang. *arrowhead matrix*). Te so oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & c_1 \\ & a_2 & & c_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & d \end{bmatrix},$$

kar zapišemo bločno kot

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A} & c \\ b^T & d \end{bmatrix},$$

kjer je $\hat{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_{n-1})$, $b = [b_1, \dots, b_{n-1}]^T$ in $c = [c_1, \dots, c_{n-1}]^T$. Reši naslednje podnaloge:

a) Pokaži, da je

$$\det A = d \prod_j a_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i \prod_{j \neq i} a_i.$$

b) Dokaži, da velja:

- če je $b_i = 0$, potem je (a_i, e_i) lastni par za matriko A ,
- če je $a_i = a_j$ za $i \neq j$, potem obstajata taka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da je $(a_i, \alpha e_i + \beta e_j)$ lastni par za matriko A .

Simetrični puščični matriki, za katero ne velja noben izmed zgornjih dveh pogojev, bomo rekli ireducibilna.

c) Dokaži: če je λ lastna vrednost ireducibilne pušč. matrike A , potem je $\lambda \neq a_i$ za vse $1 \leq i \leq n-1$.

d) Dokaži, da so lastne vrednosti ireducibilne matrike A enostavne in so rešitve enačbe $f(x) = 0$, kjer je

$$f(x) = d - x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i^2}{a_i - x}.$$

Pokaži, da so pripadajoči lastni vektorji

$$x_i = \begin{bmatrix} (\hat{A} - \lambda I)^{-1} b \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Točko a) rešimo tako, da $\det A$ razvijemo po zadnjem stolpcu. Razpišimo prvi člen razvoja.

$$(-1)^{n-1} b_1 \begin{vmatrix} & & c_1 \\ a_2 & & c_2 \\ & a_3 & c_3 \\ & & \ddots \\ & & a_{n-1} & c_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} b_1 (-1)^{n-2} c_1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n-1} a_j = -c_1 b_1 \prod_{j \neq 1}^{n-1} a_j$$

Podobno bi dobili za preostale $2 \leq i \leq n-1$, zadnji člen pa je očitno enak $d \prod_j a_j$.

Pri točki b) prvi del preverimo z neposrednim računom: $Ae_i = a_i e_i$, če je $b_i = 0$. V drugem primeru je i -ta komponenta vektorja $A(\alpha e_i + \beta e_j)$ enaka αa_i , j -ta je enaka $\beta a_j = \beta a_i$, n -ta pa $\alpha b_i + \beta b_j$. Če želimo, da je $\alpha e_i + \beta e_j$ res lastni vektor, mora tako veljati zgolj $\alpha b_i + \beta b_j = 0$. Ustrezni α in β hitro najdemo.

Točko c) rešimo s protislovjem. Denimo, da za neki i velja $Ax = a_i x$, pri čemer $x \neq 0$. Če to zapišemo po komponentah, dobimo

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_n \\ a_2 x_2 + b_2 x_n \\ \vdots \\ a_{n-1} x_{n-1} + b_{n-1} x_n \\ \sum_{j=1}^{n-1} b_j x_j + d x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i x_1 \\ \vdots \\ a_i x_n \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Vidimo, da vsi indeksi $1 \leq i \leq n-1$ nastopajo simetrično, zato bomo brez škode privzeli $i = 1$. Iz prve vrstice (13) dobimo $a_1 x_1 + b_1 x_n = a_1 x_1$, torej je $b_1 x_n = 0$. Ker je matrika A ireducibilna, mora veljati $x_n = 0$. Za vrstice $2 \leq j \leq n-1$ zato velja $a_j x_j = a_1 x_j$, torej $(a_j - a_1) x_j = 0$, zato je - ponovno zaradi ireducibilnosti matrike A - $x_j = 0$ za vse obravnavane j . Sedaj vemo, da za lastni vektor x velja $x = [x_1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$. Zadnja vrstica v (13) se tako poenostavi v $b_1 x_1 = 0$, iz česar sledi še $x_1 = 0$, torej smo prišli do protislovja, saj mora veljati $x \neq 0$.

Pri točki d) uporabimo točko a) za matriko $A - \lambda I$, kjer je λ poljubna lastna vrednost. Ker vemo, da je $a_i \neq \lambda$, lahko zapišemo

$$\det(A - \lambda I) = \left(d - \lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i^2}{a_i - \lambda} \right) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - \lambda) = f(\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - \lambda),$$

zato velja $f(\lambda) = 0$. Enostavnost lastnih vrednosti bomo pokazali tako, da dokažemo, da ima funkcija f natanko n enostavnih ničel. Za dokaz tega zadošča dokazati, da je odvod f' konstantnega predznaka povsod, razen v polih funkcije f . Ker je

$$f'(x) = -1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i^2}{(a_i - x)^2} < 0,$$

to očitno drži.

Opombe: Točke c) ne treba dokazati za potrebe točke d). Premisli!

11 Vaje 3. 5. 2017

...so odpadle zaradi ponedeljkovega urnika.

12 Vaje 10. 5. 2017

Najprej smo do konca rešili dolgove od prejšnjic.

Naloga 1. Dokaži, da za matriki $X, Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ velja $\det(I_n + Y^T) = \det(I_m + X^T Y)$.

Rešitev: Definiramo isti matriki kot pri Nalogi 27 v [2] in prav tako upoštevamo multiplikativnost determinante.

Naloga 2. Dana je 2×2 bločna matrika

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

katere $n \times n$ bloki so diagonalizabilni v isti bazi. Dokaži, da za spekter matrike A velja

$$\sigma(A) = \bigcup_{k=1}^n \sigma \left(\begin{bmatrix} \lambda_{11}^k & \lambda_{12}^k \\ \lambda_{21}^k & \lambda_{22}^k \end{bmatrix} \right),$$

kjer je λ_{ij}^k lastna vrednost matrike A_{ij} , ki pripada k -temu lastnemu vektorju, skupnemu vsem štirim blokom matrike A .

Rešitev: Glej rešitev naloge 30 v [2].

Naloga 3. Naj bosta A in B simetrični komutativni matriki. Dokaži, da sta diagonalizabilni v isti bazi. Nalogo reši najprej za primer, ko so vse lastne vrednosti matrike A enostavne.

Rešitev: Sledimo dokazu naloge 32 v [2] in za začetek upoštevajmo dodatno predpostavko o lastnih vrednostih A . Naj bo $D = Q^T A Q$ diagonalna matrika, tj. Q je prehodna matrika, za katero moramo dokazati, da je tudi $Q^T B Q$ diagonalna. Vemo, da je Q ortogonalna.

Stolpci v Q so lastni vektorji matrike A . Izberimo si en tak lastni par: $Ax = \alpha x$. Ker je $A(Bx) = BAx = \alpha Bx$, je Bx v lastnem podprostoru, ki ga napenja x , torej je $Bx = \beta x$ za neki β . Sledi, da je x lastni vektor tudi za B (morda tokrat za $\beta \neq \alpha$). Sledi, da je $Q^T B Q$ res diagonalna. Naslednji teden rešimo nalogo še v splošnem.

Izberimo si večkratno lastno vrednost α , pripadajoče neodvisne lastne vektorje iz Q zapišimo v blok Q_1 in brez škode predpostavimo $Q = [Q_1 \quad Q_2]$. Za vsak stolpec $x \in Q_1$ še vedno velja $A(Bx) = \alpha Bx$, torej $Bx \in \text{im } Q_1$ (**). Sedaj lahko izračunamo

$$Q^T B Q = \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} B [Q_1 \quad Q_2] = \begin{bmatrix} Q_1^T B Q_1 & Q_1^T B Q_2 \\ Q_2^T B Q_1 & Q_2^T B Q_2 \end{bmatrix} \stackrel{**}{=} \begin{bmatrix} Q_1^T B Q_1 & Q_1^T B Q_2 \\ 0 & Q_2^T B Q_2 \end{bmatrix},$$

podobno pa je tudi (že zaradi simetričnosti $Q^T B Q$) $Q_1^T B Q_2 = 0$. Označimo neničelna bloka v zgornji matriki z B_1 in B_2 ter podobno storimo še za

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} Q_1^T A Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2^T A Q_2 \end{bmatrix},$$

pri čemer pa vemo, da je $A_1 = \alpha I$. Če pokažemo, da je mogoče B_1 diagonalizirati v isti bazi, smo problem prevedli na manjšega in lahko nadaljujemo induktivno. Vsekakor obstaja ortogonalni R , za katero je matrika $R^T B_1 R$ diagonalna. Brez težav lahko preverimo, da je $\tilde{Q} = [Q_1 R \quad Q_2]$ še vedno ustrezna prehodna matrika za A , hkrati smo pa že uspeli diagonalizirati del matrike B . Postopek sedaj ponavljamo.

Opombe: V splošnem primeru morda ne končamo z isto prehodno matriko, kot smo začeli.

13 Vaje 17. 5. 2017

Najprej smo končali prejšnjo nalogo, potem pa smo zagrizli v posplošene probleme lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$ oz. $y^H A = \lambda y^H B$.

Naloga 1. Naj bo $\lambda \neq \infty$ enostavna lastna vrednost in x ter y pripadajoča lastna vektorja (desni in levi). Dokaži, da velja $y^H Bx \neq 0$. Namig: uporabi posplošeno Jordanovo formo.

Rešitev: Jordanova forma $J(\lambda) = X(A - \lambda B)X^{-1}$ je oblike

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} J_1(\lambda) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_k(\lambda) & & \\ & & & N_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & N_j \end{bmatrix},$$

kjer sta k in j po vrsti števili lastnih vektorjev, ki pripadata končnim in neskončnim lastnim vrednostim. Bloki J_i ter N_i so oblike

$$J_i(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i - \lambda & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad N_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Privzamemo lahko, da je λ_1 enostavna lastna vrednost, torej je $J_1(\lambda)$ blok razsežnosti 1×1 . V Jordanovi bazi sta pripadajoča levi in desni lastni vektor oba enaka e_1 , torej v standardni bazi ta vektorja izrazimo kot $x = X e_1$ in $y = (e^H X^{-1})^H$. Število $y^H Bx$ se pojavi, če izračunamo $e_1^H J e_1$, saj velja

$$\lambda_1 - \lambda = e_1^H J e_1 = e_1^H X^{-1} (A - \lambda B) X e_1 = y^H (A - \lambda B) x = y^H A x - \lambda y^H B x,$$

torej iz primerjave koeficientov obeh izražav istega linearne polinoma sledi $\lambda_1 = y^H A x$ in $1 = y^H B x$. Če bi namesto e_1 izbrali kakšen njegov razteg, bi dobili drugačni, a še vedno neničelni vrednosti.

Opombe: Sledi, da lahko občutljivost lastne vrednosti λ definiramo analogno kot v standardnem primeru, ko je $B = I$. Kaj pa velja za $\lambda = \infty$?

Naloga 2. Oglejmo si definitni primer posplošenega problema, ko sta A in B simetrični ter je B pozitivno definitna. Za $x \neq 0$ definiramo Rayleighov kvocient

$$\rho(x, A, B) = \frac{x^T A x}{x^T B x}.$$

Dokaži:

- V $\rho(x, A, B)$ je dosežen minimum $\min_{\lambda} \|Ax - \lambda Bx\|_{B^{-1}}$, kjer je $\|z\|_W = \sqrt{z^T W z}$.
- $\rho(x, A, B)$ leži med največjo in najmanjšo lastno vrednostjo.

Rešitev: Pri prvem delu vpeljemo $f(\lambda) = \|Ax - \lambda Bx\|_{B^{-1}}^2$. Upoštevamo definicijo norme, razpišemo $f(\lambda) = (Ax - \lambda Bx)^T B^{-1} (Ax - \lambda Bx)$, pri tem upoštevamo simetričnost A in B . Opazimo, da je f kvadratni polinom. Odvajamo in pokažemo, da je ničla odvoda dosežena ravno v $\lambda = \rho(x, A, B)$. Ker je koeficient $x^T Bx$ pri λ^2 večji od nič (B pozitivno definitna), je v $\lambda = \rho(x, A, B)$ res dosežen maksimum.

Za drugi del imamo dve možnosti. Na vajah smo sledili rešitvi v [2], kjer upoštevamo obstoj matrike $\sqrt{B}$, tu pa bomo - kot je bil predlog - nalogo rešili še z uporabo razcepa Choleskega. Pišimo.

$$\frac{x^T A x}{x^T B x} = \frac{x^T A x}{x^T V^T V x} \stackrel{y=Vx}{=} \frac{(V^{-1}y)^T A V^{-1}y}{y^T y} = \frac{y^T V^{-T} A V^{-1}y}{y^T y},$$

torej ρ leži med največjo in najmanjšo lastno vrednostjo matrike $V^{-T} A V^{-1}$. Dokažimo, da se njene lastne vrednosti ujemajo z lastnimi vrednostmi pri posplošenem problemu $Ax = \lambda Bx$.

$$\begin{aligned} V^{-T} A V^{-1} z = \lambda z &\Leftrightarrow A V^{-1} z = \lambda V^T z \\ &\Leftrightarrow A V^{-1} z = \lambda V^T V V^{-1} z \\ &\Leftrightarrow A(V^{-1} z) = \lambda B(V^{-1} z), \end{aligned}$$

torej se lastne vrednosti res ujemajo.

Naloga 3. Pobljze si oglejmo dvojni premik v QZ-algoritmu, kjer imamo na vsakem koraku gornjehessenbergovo matriko A ter gornjetrikotno matriko B , ki na diagonali nima ničel. V QZ-algoritmu implicitno izvajamo QR-iteracijo za matriko $C = AB^{-1}$. Nalogo razdelimo v dve točki:

- Za izračun premika najprej potrebujemo lastni vrednosti spodnjega desnega 2×2 bloka v matriki C . Označimo ga s P . Dokaži, da lahko P oz. njegovi lastni vrednosti $\lambda_{1,2}$ izračunamo v konstantnem času.
- Za izračun premika potrebujemo tudi prvi stolpec matrike $N = C^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)C + \lambda_1 \lambda_2 I$. Dokaži, da ga lahko izračunamo v konstantnem času.

Rešitev:

- Oglejmo si, katere elemente v A in B potrebujemo za izračun bloka P . Pri tem upoštevamo, da je, ker je B gornjetrikotna, tak tudi njen inverz. Vemo tudi, da bo C gornjehessenbergova. Če zapišemo $C = AB^{-1}$ s pomočjo skice

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix},$$

opazimo, da na rdeče obarvan blok P vplivajo natanko modro obarvani elementi v A in B^{-1} . Matriko A že imamo, ogledati pa si moramo še, kako priti do modrih elementov v B^{-1} , ne da bi izračunali celotno matriko B^{-1} . Če matriko B zapišemo bločno kot

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & X \\ & B_2 \end{bmatrix},$$

vemo, da sta diagonalna bloka $B_{1,2}$ obrnljiva in lahko poizkusimo z nastavkom

$$BB^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & X \\ & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^{-1} & Y \\ & B_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \\ & I \end{bmatrix}.$$

Veljati mora le $B_1 Y + X B_2^{-1} = 0$, torej je $Y = -B_1^{-1} X B_2^{-1}$ in nastavek za inverz je ustrezen. Za B_2 tako vzamemo spodnji desni 3×3 blok, saj mora biti B_2 kvadraten in blok velikosti 2×2 ne zadošča.

Po tem ko izračunamo blok P , lahko hitro dobimo še njegovi lastni vrednosti.

- b) Za izračun prvega stolpca v N potrebujemo prve stolpce matrik C^2 , C in I . Matrika C^2 ima poleg zgornjega trikotnika še dve diagonalni. Če podobno kot prej skiciramo $C^2 = CC$, dobimo

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots \\ * & * & * & \\ * & * & * & \\ & * & * & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots \\ * & * & * & \\ & * & * & \\ & & * & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots \\ * & * & * & \\ & * & * & \\ & & * & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

torej za izračun prvega stolpca v N poleg (lastnih vrednosti) bloka P potrebujemo še prva stolpca v matriki C . Podobno kot prej premislimo, da za slednje zadoščata zgornji levi 3×2 blok v matriki A ter zgornji levi 2×2 blok v matriki B^{-1} . Slednjega dobimo tako, da izračunamo inverz 2×2 matrike B_1 .

Opombe: Postopek, kako premakniti grbo, ki nastane med algoritmom, spoznamo na predavanjih.

14 Vaje 24. 5. 2017

Ogledali si bomo del snovi iz [4], pri čemer bo naš cilj dokazati (vsaj) kvadratni red konvergence Newtonove metode za posplošeni primer lastnih vrednosti. Pred tem definirajmo še algebraično in geometrijsko večkratnost lastne vrednosti λ_0 za problem $T(\lambda)x = 0$ oz. $y^H T(\lambda) = 0$, kjer je $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ dovoljkrat zvezno odvedljiva funkcija:

- geometrijska večkratnost lastne vrednosti λ_0 je $\dim \ker T(\lambda_0)$
- algebraična večkratnost lastne vrednosti λ_0 je stopnja n odvoda funkcije $f(\lambda) = \det T(\lambda)$, za katero velja $f^{(n)}(\lambda_0) \neq 0$ in $f^{(k)}(\lambda_0) = 0$ za vse $0 \leq k < n$.

Če v nadaljevanju ni drugače rečeno, bomo obdržali definicijo za f .

Naloga 1. Naj bo $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ dovoljkrat zvezno odvedljiva in $A(\lambda_0) = 0$. Dokaži, da je algebraična večkratnost λ_0 vsaj n .

Rešitev: Zapišemo

$$f(\lambda) = \sum_{\pi \in S^n} \sigma(\pi) \prod_i A_{i, \pi(i)}(\lambda),$$

upoštevamo pravilo za odvod produkta

$$\left(\prod_{i=1}^N f_i(x) \right)^{(k)} = \sum_{k_1 + \dots + k_N = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_N} \prod_{i=1}^N f_i^{(k_i)}(x),$$

ga uporabimo za f ter opazimo, da pri $k < n$ za vsaj eno od števil k_i velja $k_i = 0$, torej je $A_{i, \pi(i)}^{(k_i)}(\lambda_0) = 0$.

Naloga 2. Naj bosta T in f kot v uvodu. Dokaži, da je algebraična večkratnost večja ali enaka geometrijski.

Rešitev: Naj bo $\dim \ker T(\lambda_0) = r$, torej je $\text{rang } T(\lambda_0) = n - r$. Zadošča dokazati, da je $f^{(k)}(\lambda_0) = 0$ za $1 \leq k \leq r - 1$.

Nalogo si nekoliko poenostavimo, če najprej najdemo $n - k$ neodvisnih stolpcev matrike $T(\lambda_0)$ in tako permutacijsko matriko S , ki postavi te stolpce v levi del matrike $T(\lambda_0)S$. Nato najdemo $n - r$ neodvisnih vrstic v podmatriki $T(\lambda_0)S[:, 1 : n - r]$ in tako permutacijsko matriko V , ki te vrstice postavi v zgornji del matrike $\tilde{T}(\lambda_0) = VT(\lambda_0)S$. Dobljeno matrično funkcijo $\tilde{T}$ bločno zapišemo kot

$$\tilde{T}(\lambda) = \begin{bmatrix} T_{11}(\lambda) & T_{12}(\lambda) \\ T_{21}(\lambda) & T_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

pri čemer sedaj vemo, da je blok T_{11} obrnljiv v $\lambda = \lambda_0$ in zaradi zveznosti determinante še vsaj v majhni odprti okolici $\mathcal{O}$ te vrednosti. V tej okolici lahko matriko $\tilde{T}(\lambda)$ zapišemo kot

$$\tilde{T}(\lambda) = LDU = \begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ L_{21}(\lambda) & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & D_{22}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-r} & U_{12}(\lambda) \\ 0 & I_r \end{bmatrix},$$

kjer je, če opustimo pisanje argumenta λ ,

$$\begin{aligned} L_{21} &= T_{21}T_{11}^{-1}, \\ D_{22} &= T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}, \\ U_{12} &= T_{11}^{-1}T_{12}, \end{aligned}$$

kar lahko preverimo z neposrednim računom. Za $\lambda \in \mathcal{O}$ torej velja

$$n - r = \text{rang } \tilde{T}(\lambda) = \text{rang } T(\lambda) = \text{rang } D(\lambda) = \text{rang } T_{11}(\lambda),$$

torej mora biti $\text{rang } D_{22}(\lambda) = 0$, se pravi je $D_{22}(\lambda) = 0$. Ker je

$$f(\lambda) = \det T(\lambda) = \pm \det \tilde{T}(\lambda) = \pm \det D(\lambda) = \pm \det T_{11}(\lambda) \det D_{22}(\lambda),$$

lahko uporabimo Leibnizovo pravilo za odvod produkta ter rezultat prejšnje naloge, s čimer zaključimo dokaz.

Naloga 3. Naj bo geometrijska večkratnost λ_0 za posplošeni problem $T(\lambda)x = 0$ oz. $y^H T(\lambda) = 0$ enaka 1 in naj bosta x_0 ter y_0 pripadajoča normirana lastna vektorja (desni in levi). Dokaži, da sta trditvi

- Algebraična večkratnost λ_0 je 1 in
- $y_0^H T'(\lambda_0)x_0 \neq 0$

ekvivalentni.

Rešitev: Radi bi torej dobili nekakšno zvezo med odvodom funkcije $f = \det T$ (prva trditev) ter matriko T' (druga trditev), ko oboje izračunamo v $\lambda = \lambda_0$. Izkaže se, da si je pri tem koristno pomagati z matriko

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} T(\lambda) & y_0 \\ x_0^H & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedaj se T' pojavi v C' , ugotoviti pa moramo, kako dobiti zvezno med f in C , ali pa, denimo, f in $g = \det C$. Slednjo je lažje najti, saj f in g povezuje formula za $(n+1, n+1)$ -ti element v C^{-1} , če inverz obstaja. Element na mestu $(n+1, n+1)$ v inverzu matrike C namreč dobimo, če $(n+1, n+1)$ -to poddeterminantno matrike C , ki je v našem primeru enaka $\det T = f$, delimo z $\det C = g$.

Zato bomo najprej dokazali, da je matrika C obrnljiva v neki odprti okolici $\mathcal{O}$ točke $\lambda = \lambda_0$. Zaradi zveznosti je dovolj obravnavati točko $\lambda = \lambda_0$. Poglejmo, kaj je v njenem jedru v tem primeru. Naj bo

$$\begin{bmatrix} T(\lambda_0) & y_0 \\ x_0^H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(\lambda_0)w + \omega y_0 \\ x_0^H w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Prvo enakost z leve pomnožimo z y_0^H in dobimo $0^H w + \omega \|y_0\|^2 = 0$, torej je $\omega = 0$. Prva enakost se torej poenostavi v $T(\lambda_0)w = 0$. Ker je geometrijska večkratnost lastne vrednosti λ_0 enaka ena, iz tega sledi, da je $w = \beta x_0$ za neki skalar β . Vstavimo v drugo enakost in dobimo $\beta = 0$. Matrika $C(\lambda_0)$ je torej obrnljiva.

Za $\lambda \in \mathcal{O}$ si sedaj pobliže oglejmo $\gamma(\lambda) = C(\lambda)_{n+1, n+1}^{-1} = e_{n+1}^H C(\lambda)^{-1} e_{n+1} = f(\lambda)/g(\lambda)$. Vemo, da je $\gamma(\lambda_0) = 0$, saj je $f(\lambda_0) = 0$. Če odvajamo $f = \gamma g$, tako dobimo

$$f'(\lambda_0) = (\gamma g')(\lambda_0) + (\gamma' g)(\lambda_0) = (\gamma' g)(\lambda_0).$$

Ker je $g(\lambda_0) \neq 0$, bo algebraična večkratnost lastne vrednosti λ_0 enaka ena, tj. $f'(\lambda_0) \neq 0$, natanko tedaj, ko velja $\gamma'(\lambda_0) \neq 0$.

Za izračun γ' potrebujemo odvod inverza matrične funkcije. Dobimo ga, če odvajamo zvezo $A^{-1}(\lambda)A(\lambda) = I$. Če zaradi preglednosti opustimo zapis argumenta, dobimo

$$(A^{-1})'A + A^{-1}A' = 0, \text{ torej } (A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}.$$

Velja torej

$$\gamma'(\lambda) = -e_{n+1}^H C^{-1}(\lambda)C'(\lambda)C^{-1}(\lambda)e_{n+1}.$$

Pojavi se npr. vprašanje, kaj je $C^{-1}(\lambda_0)e_{n+1}$. To je tisti vektor $\begin{bmatrix} w & \omega \end{bmatrix}^T$, ki se s C preslika v e_{n+1} . Podobno kot v (14) bi radi dobili

$$\begin{bmatrix} T(\lambda_0) & y_0 \\ x_0^H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(\lambda_0)w + \omega y_0 \\ x_0^H w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Iz druge enačbe sledi, da je $w = x_0$ dober kandidat, iz prve pa potem dobimo $\omega = 0$. Analogno sklepamo v primeru, ko računamo $e_{n+1}^H C^{-1}$. Na koncu dobimo

$$\gamma'(\lambda_0) = \begin{bmatrix} y_0^H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'(\lambda_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} = y_0^H T'(\lambda_0) x_0,$$

s tem pa je dokaz zaključen.

Naloga 4. Dokaži: če je algebraična večkratnost lastne vrednosti λ_0 enaka 1, potem Newtonova metoda (inverzna iteracija) k njej v neki okolici konvergira kvadratično.

Rešitev: Spomnimo se: iščemo ničlo funkcije

$$F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} T(\lambda)x \\ v^H x - 1 \end{bmatrix},$$

za neko izbiro vektorja v . Zadošča, če dokažemo obrnljivost Jacobijeve matrike v točki (x_0, λ_0) , ki je ničla zgornje funkcije. Jacobijeva matrika je

$$J(x, \lambda) = \begin{bmatrix} T(\lambda) & T'(\lambda)x \\ v^H & 0 \end{bmatrix},$$

zanima pa nas, kaj je v njenem jedru v točki $(x, \lambda) = (x_0, \lambda_0)$. Postopamo podobno kot pri prejšnji nalogi in zapišemo

$$\begin{bmatrix} T(\lambda_0) & T'(\lambda_0)x_0 \\ v^H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(\lambda_0)w + \omega T'(\lambda_0)x_0 \\ v^H w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Obstaja levi lastni vektor y_0 . Z njim pomnožimo prvo enačbo in dobimo

$$0 = y_0^H T(\lambda_0)w + \omega y_0^H T'(\lambda_0)x_0 = 0 + \omega y_0^H T'(\lambda_0)x_0.$$

Ker je alg. večkratnost λ_0 enaka ena, iz prejšnje naloge sledi $y_0^H T'(\lambda_0)x_0 \neq 0$, torej je $\omega = 0$. Iz naloge 2 sledi, da je tudi geometrijska večkratnost enaka ena. Zaradi prve enakosti v (15) torej velja $w = \beta x_0$ za neki skalar β . To vstavimo v drugo enakost in dobimo $0 = \beta v^H x_0$. Ker je $v^H x_0 = 1$, mora biti $\beta = 0$. Matrika $J(x_0, \lambda_0)$ je torej obrnljiva.

15 Vaje 31. 5. 2017

Naloga 1. (Vir navdiha: [6]) Dan je kvadratni polinom $P(\lambda) = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$, imamo pa težavo, da so norme $\gamma_i = \|A_i\|_2$ povsem različnih velikostnih razredov, zato rezultati, ko najdemo rešitev lastnega problema $P(\lambda)x = 0$ neposredno, niso zadovoljivi! To smo pokazali z demonstracijo v Matlabu.

Matrike A_i bomo zato ustrezno skalirali, tako da bodo imele približno enake norme. To storimo tako, da izberemo neki α in vpeljemo $\lambda = \mu\alpha$. Novi problem se sedaj glasi

$$R(\mu) = P(\lambda(\mu)) = \mu^2(\alpha^2 A_2) + \mu(\alpha A_1) + A_0.$$

Da si stvar še nekoliko olajšamo, izberemo še β in vpeljemo $Q(\mu) = \beta R(\mu)$, s čimer bi radi dosegli, da so norme matrik $\hat{\gamma}_i = \left\| \hat{A}_i \right\|_2 = \|\alpha^i \beta A_i\|_2$ ne le enake, temveč tudi čim bližje 1. Vemo, da $\alpha, \beta \neq 0$, zato lahko predpostavimo lahko $\alpha, \beta > 0$, torej $\hat{\gamma}_i = \alpha^i \beta \gamma_i$. Radi bi našli taka α in β , pri katerih je norma $\|(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) - (1, 1, 1)\|_\infty$ najmanjša možna.

Demonstracija v Matlabu je pokazala, da so pri tako izbranih vrednostih α in β rezultati reševanja lastnega problema precej boljši.

Rešitev: Iščemo torej

$$\min_{\alpha, \beta} \max\{|\alpha^2 \beta \gamma_0 - 1|, |\alpha \beta \gamma_1 - 1|, |\beta \gamma_2 - 1|\}$$

Izrazi se nekoliko polepšajo, če vpeljemo $a = \alpha \sqrt{\gamma_2 / \gamma_0}$, $b = \beta \gamma_0$ in $g = \gamma_1 / \sqrt{\gamma_0 \gamma_2}$. Nov problem se tako glasi

$$\min_{a, b} \max\{|a^2 b - 1|, |abg - 1|, |b - 1|\}.$$

V optimalni točki (a^*, b^*) so vse tri komponente vektorja, katerega normo računamo, po absolutni vrednosti enake. Utemeljimo to.

Če to ne drži, je bodisi ena večja kot preostali dve bodisi sta dve večji kot tretja. Denimo, da velja prva možnost. Zaradi zvezne odvisnosti komponent od parametrov a in b , lahko največjo absolutno vrednost nekoliko zmanjšamo, hkrati pa zagotovimo, da drugi dve ne presežeta te nove vrednosti. Podobno sklepamo, če velja druga možnost, pri tem pa je pomembno, da imamo za popravke na voljo dva parametra.

Oglejmo si sedaj sistem

$$|a^2 b - 1| = |abg - 1| = |b - 1|.$$

Imamo tri števila, katerih absolutne vrednosti so si enake. Med njimi zato obstajata vsaj dve, ki sta tudi istega predznaka. Z (i, j) označimo primer, ko sta istega predznaka i -to in j -to število:

- (1, 2): velja $a^2 b - 1 = abg$, torej $ab(a - g) = 0$, torej v tem primeru velja $a = g$,
- (1, 3): velja $a^2 b - 1 = b - 1$, torej $b(a^2 - 1) = 0$, torej v tem primeru velja $a = 1$,
- (2, 3): velja $abg - 1 = b - 1$, torej $b(ag - 1) = 0$, torej v tem primeru velja $a = 1/g$.

Načeloma bi morali obravnavati vse tri primere, mi pa smo izkoristili namig, ki pove, da je optimalna vrednost dosežena v primeru (1, 3) (to pokažemo z neposrednim računanjem). Tako najprej dobimo $a^* = 1$, izračunati pa je treba še b^* . Izhajamo iz, denimo, $|a^* b^* g - 1| = |b^* - 1|$.

Če je $a^* b^* g - 1 = b^* - 1$, potem mora veljati $a^* = 1/g$. Ker je g določen iz podatkov, mi pa že imamo $a^* = 1$, ta možnost v splošnem ne pride v poštev.

V nasprotnem primeru je $a^* b^* g - 1 = -(b^* - 1)$, torej sledi

$$b^* = \frac{2}{1 + a^* g}.$$

Naloga 2. (Vir navdiha: [4]) Dan je polinom $P(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \lambda^i A_i$. Dokaži, da lahko namesto problema $P(\lambda)x = 0$ rešujemo problem $L(\lambda)x = 0$, kjer je

$$L(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} & A_3 & \\ I & A_2 & \\ & & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & & \\ & A_1 & A_0 \\ & -I & \end{bmatrix}$$

Rešitev: Preverimo, kateri vektorji so v jedru $L(\lambda)$.

$$L(\lambda) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\lambda \begin{bmatrix} & A_3 & \\ I & A_2 & \\ & & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & & \\ & A_1 & A_0 \\ & -I & \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda A_3 y - x \\ \lambda x + \lambda A_2 y + A_1 y + A_0 z \\ \lambda z - y \end{bmatrix}.$$

Če je $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ lastni vektor, potem velja (prva in tretja komponenta rezultata)

$$y = \lambda z \quad \text{in} \quad x = \lambda A_3 y = \lambda^2 A_3 z.$$

Sledi, da je $z \neq 0$, sicer je tudi $x = y = 0$. Na polinom P nas spomni druga komponenta. Ker pri A_0 stoji z , je to naš kandidat za lastni vektor za P . Iz druge komponente sledi

$$0 = \lambda x + \lambda A_2 y + A_1 y + A_0 z = \lambda(\lambda^2 A_3 z) + \lambda A_2(\lambda z) + \lambda A_1(\lambda z) + A_0 z = P(\lambda)z,$$

torej je naša domneva pravilna.

Ostala nam je še druga smer. Če je $P(\lambda)w = 0$ za neka λ in $w \neq 0$, potem lahko hitro preverimo, da je $\begin{bmatrix} \lambda^2 A_3 w & \lambda w & w \end{bmatrix}^T$ lastni vektor za L pri lastni vrednosti λ .

Naloga 3. Pokažimo, kako pri obravnavi stacionarnih točk rešitev avtonomnih diferencialnih enačb z zamikom pridemo do problema

$$(A_0 - \lambda I + \sum_{j=1}^k A_j e^{-a_j \lambda})x = 0.$$

Rešitev: Rešitev je osnovana po [5]. Avtonomno diferencialno enačbo z zamikom v splošnem zapišemo kot

$$\dot{x} = f(x, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_k}),$$

kjer je $x : t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija in je

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dovoljkrat zvezno odvedljiva. Operator zamika τ je definiran kot $x_\tau(t) = x(t - \tau)$. Zaradi enotnejšega zapisa bomo sedaj uvedli $\tau_0 = 0$.

Naj bo x^* stacionarna rešitev, ki jo, če želimo, denimo, obravnavati njeno stabilnost, zmotimo za $\delta = \delta(t)$. Za novo rešitev $x^* + \delta$ mora, upoštevajoč, da je x^* konstantna, veljati

$$\begin{aligned} \dot{x}^* + \dot{\delta} &= \dot{\delta} \\ &= f((x^* + \delta)_{\tau_0}, (x^* + \delta)_{\tau_1}, \dots, (x^* + \delta)_{\tau_k}) \\ &= f(x^* + \delta_{\tau_0}, x^* + \delta_{\tau_1}, \dots, x^* + \delta_{\tau_k}) \\ &\doteq f(x^*, \dots, x^*) + J_0 \delta_{\tau_0} + \dots + J_k \delta_{\tau_k} \\ &= J_0 \delta_{\tau_0} + \dots + J_k \delta_{\tau_k}, \end{aligned}$$

kjer so Jacobijeve matrike J_i funkcije f izračunane v točki $(x^*, \dots, x^*)$. Če poskusimo z nastavkom $\delta = Ae^{\lambda t}$, potem se zgornje poenostavi v

$$\lambda Ae^{\lambda t} = \sum_{i=0}^k J_i Ae^{\lambda(t-\tau_i)}.$$

Če delimo z $e^{\lambda t}$, upoštevamo $\tau_0 = 0$ ter prenesemo vse na isto stran enačbe, dobimo

$$0 = \left(J_0 - \lambda I + \sum_{i=1}^k J_i e^{-\lambda \tau_i} \right) A.$$

Lambde so torej lastne vrednosti, stolpci matrike A pa pripadajoči lastni vektorji.

Opombe: V nastavku bi lahko namesto matrike A vzeli tudi vektor konstant x .

Naloga 4. Dan je polinom $P(\lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda^i A_i$. Smiselno definiraj operatorja

- obrat $P \mapsto \text{OB}(P)$ in
- konjugiranje $P \mapsto \overline{P}$,

nato pa še lastnosti

- biti sod oz. lih,
- biti palindromski,
- biti anti-palindromski in
- biti konjugirano palindromski.

Nato dokaži naslednje trditve. Če je λ lastna vrednost in je P

- sod oz. lih, potem je tudi $-\lambda$ lastna vrednost,
- palindromski, potem je tudi $1/\lambda$ lastna vrednost,
- anti-palindromski, potem je tudi $-1/\lambda$ lastna vrednost,
- konjugirano palindromski, potem je tudi $1/\overline{\lambda}$ lastna vrednost.

Rešitev: Ideja za nalogo: glej [7]. Obrat smo definirali kot $\text{OB}(P)(\lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda^i A_{k-i}$, konjugiranje pa kot $\overline{P}(\lambda) = \sum_{i=1}^k \lambda^i \overline{A_i}$. Sodost in lihost definiramo, kot smo že navajeni: $P(-\lambda) = P(\lambda)$ pri sodih polinomih in $P(-\lambda) = -P(\lambda)$ pri lihih. Polinom je palindromski, če je $\text{OB}(P) = P$ in anti-palindromski, če je $\text{OB}(P) = -P$. Konjugirano palindromskost definiramo preko zveze $\text{OB}(P) = \overline{P}$.

Izberimo lastni par (λ_0, x_0) . Pri prvi točki z neposrednim računom preverimo

$$P(-\lambda_0)x_0 = \pm P(\lambda_0)x_0 = 0.$$

Pri drugi in tretji upoštevamo $\text{OB}(P)(\lambda) = \lambda^k P(1/\lambda)$. Pri zadnji točki smo ugotovili, da lastni vrednosti $1/\overline{\lambda}$ pripada vektor $\overline{x}_0$

Opombe: Za $\lambda = 0$ lastno vrednost $1/\lambda$ nič interpretiramo kot neskončno. Premislimo lahko tudi, kaj velja v primeru, ko je polinom, denimo, konjugirano anti-palindromski.

16 Vaje 7. 6. 2017

Naloga 1. Najdi vsaj eno rešitev matrične enačbe $AX^2 + BX + C = 0$, pri čemer privzamemo $\det A \neq 0$.

Rešitev: Enačba nas spomni na posplošeni problem $P(\lambda)x = 0$ za matrični polinom $P(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$. Denimo, da smo jo uspešno rešili, npr. preko linearizacije

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Preverili smo, da je to res linearizacija in da za lastne vektorje zgoraj velja $y = \lambda x$. Preblisk: denimo, da imamo n neodvisnih zgornjih polovic x_i . Zložimo jih v prehodno matriko U , pripadajoče lastne vrednosti λ_i pa v diagonalno matriko L in preverimo, da je $X = ULU^{-1}$ rešitev.

Če to vstavimo v začetno enačbo, moramo dokazati

$$AUL^2U^{-1} + BUL^2U^{-1} + C = 0.$$

Ker o zaradi tega, ker o U^{-1} ne vemo ničesar oprijemljivega, se ga znebimo in raje dokažemo

$$AUL^2 + BUL^2 + CU = 0.$$

Odločili smo se, da bomo stvar dokazali po stolpcih. Izberemo poljuben i , $1 \leq i \leq n$ in pokažemo

$$AUL^2e_i + BUL^2e_i + CUe_i = 0.$$

Ker je $Ue_i = x_i$ in $Le_i = \lambda_i e_i$, dobimo na levi $P(\lambda_i)x_i$, torej enakost drži.

Opombe: Težave, na katere morda naletimo:

- Lastni vektorji so lahko v posplošenem lastnem problemu enaki za različne lastne vrednosti, zato morda ne obstaja n neodvisnih.
- Morda n lastnih vektorjev (odvisnih ali ne) sploh ne obstaja. V primeru, ko imamo $A = B = -I$ in je

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

v resnici rešujemo kar standardni primer $Cx = \mu x$, kjer je $\mu = \lambda^2 + \lambda$, vemo pa, da matrike C ne moremo diagonalizirati. Vseeno opazimo, da je $X = C$ rešitev.

V obeh primerih lahko zgradimo U iz Jordanove baze in postopamo podobno kot v zgornjem primeru, le da L nadomestimo z Jordanovo formo.

Smo sedaj našli vse rešitve?

Naloga 2. (Relativni Weylov izrek za singularne vrednosti) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $\tilde{A} = Y^T A X$. Singularne vrednosti matrike A označimo kot $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$, singularne vrednosti matrike $\tilde{A}$ pa kot $\tilde{\sigma}_1 \geq \dots \geq \tilde{\sigma}_n$. Dokaži naslednji izrek.

Če sta matriki X in Y obrnljivi, potem za vse $1 \leq i \leq n$ velja

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \sigma_i \varepsilon,$$

kjer je $\varepsilon = \max\{\|X^T X - I\|_2, \|Y^T Y - I\|_2\}$.

Rešitev: Spomnimo se analoga izreka, ki ga že poznamo. Za lastne vrednosti (urejene po velikosti) λ_i simetrične matrice A in lastne vrednosti $(\dots) \tilde{\lambda}_i$ simetrične matrice $X^T A X$, kjer je X obrnljiva, velja $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| \leq |\lambda_i| \|X^T X - I\|_2$.

Problem bi torej radi prevedli na že znanega. Zato potrebujemo matrico C , katere lastne vrednosti so σ_i in tako matrico Z , da bodo $\tilde{\sigma}_i$ lastne vrednosti matrice $Z^T C Z$. Spomnimo se lahko denimo naloge 5 z vaj 1 (ali pa predavanj), kjer smo za matrico

$$C = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$$

pokazali, da so njene lastne vrednosti

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq \underbrace{0 = \dots = 0}_{m-n} \geq -\sigma_n \geq \dots \geq -\sigma_1.$$

Potrebujemo še matrico Z , za katero bo $\tilde{C} = Z^T C Z$ take oblike kot C , le da v njej pojavitve A zamenjamo z $\tilde{A}$. Z nekaj poskušanja ugotovimo, da je primerna izbira

$$Z = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$

Že kar takoj velja, da je $|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \sigma_i \|Z^T Z - I\|_2$, ugotoviti moramo le, kako se izraža $Z^T Z - I$ z X in Y . Ker je $Z^T Z - I$ bločno diagonalna, se lahko hitro prepričamo, da do njenega singularnega razcepa pridemo preko singularnih razcepov za $X^T X - I$ in $Y^T Y - I$ (tu je I dvakrat manjše dimenzije) in je unija singularnih vrednosti teh dveh matrik enaka singularnim vrednostim matrice $Z^T Z - I$. Ker je 2-norma matrice enaka največji izmed singularnih vrednosti dane matrice, je dokaz končan.

Naloga 3. Dokaži, da za $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in njene singularne vrednosti $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ velja

$$\sigma_i = \max_{\substack{E \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim E = i}} \min_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \min_{\substack{E \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim E = n+1-i}} \max_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Rešitev: Vemo, da velja

$$\lambda_i = \max_{\substack{E \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim E = i}} \min_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x} = \min_{\substack{E \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim E = n+1-i}} \max_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

za lastne vrednosti λ_i matrice A . Spomnimo se, da je $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$, torej velja

$$\sigma_i^2 = \max_{\substack{E \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim E = i}} \min_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{x^T A^T A x}{x^T x} = \min_{\substack{E \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim E = n+1-i}} \max_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{x^T A^T A x}{x^T x}.$$

Opazimo

$$\frac{x^T A^T A x}{x^T x} = \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}.$$

Ker je korenjenje monotona funkcija, lahko zgornji min-max izraz korenimo in pridemo do želenega rezultata.

Naloga 4. Naj ima bločno podana $m \times n$ matrika $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$ singularne vrednosti $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$, njen $n \times n$ blok A_1 pa singularne vrednosti $\tau_1 \geq \dots \geq \tau_n$. Dokaži, da za vse $1 \leq i \leq n$ velja

$$\sigma_i \geq \tau_i \geq \sigma_{i+m-n}.$$

Namig: uporabi izrek o prepletanju lastnih vrednosti za simetrične matrike A , ki povezuje lastne vrednosti $\lambda^{(k)}$ vodilne podmatrike A_k in lastne vrednosti $\lambda^{(k+1)}$ vodilne podmatrike A_{k+1} . Velja

$$\lambda_1^{(k+1)} \geq \lambda_1^{(k)} \geq \lambda_2^{(k+1)} \geq \dots \geq \lambda_k^{(k+1)} \geq \lambda_k^{(k)} \geq \lambda_{k+1}^{(k+1)}.$$

Rešitev: Prvi poskus: znani izrek bi uporabili za C iz naloge 2. Žal se v tej matriki ne pojavi podmatrika, ki bi imela lastne vrednosti τ_i . Drugi poskus: $A^T A$. Razpišimo.

$$A^T A = \begin{bmatrix} A_1^T A_1 & A_1^T A_2 \\ A_2^T A_1 & A_2^T A_2 \end{bmatrix}.$$

Izrek uporabimo za $k = n$, saj se bodo takrat med lastnimi vrednostmi pojavili τ_i^2 ali kaj temu podobnega. Velja

$$\dots \geq \lambda_i^{(n+1)} \geq \lambda_i^{(n)} = \tau_i^2 \geq \lambda_{i+1}^{(n+1)} \geq \dots$$

Sedaj po vrsti uporabimo izrek za vse $k > n$. Pri tem trenutno zgornjo mejo za τ_i^2 ocenimo navzgor, spodnjo mejo pa navzdol. Pri zgornjih mejah dobimo verigo

$$\sigma_i^2 = \lambda_i^{n+(m-n)} \geq \dots \geq \lambda_i^{(n+2)} \geq \lambda_i^{(n+1)} \geq \lambda_i^{(n)} = \tau_i^2,$$

pri spodnjih pa

$$\tau_i^2 \geq \lambda_{i-1}^{(n+1)} \geq \lambda_{i-2}^{(n+2)} \geq \dots \geq \lambda_{i+(m-n)}^{(n+(m-n))} = \sigma_{i-m+n}^2.$$

Neenakosti zgoraj še korenimo.

Naloga 5. Matrika

$$H = \begin{bmatrix} A & F \\ G & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

je Hamiltonova, če sta bloka F in G simetrična. Dokaži, da za Hamiltonovo matriko H velja: če je λ lastna vrednost matrike H , potem so njene lastne vrednosti tudi $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ in $-\bar{\lambda}$.

Namig: pomagaj si s prehodno matriko

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Ker je matrika H realna, nastopajo ničle njenega karakterističnega polinoma v konjugiranih parih. Torej velja: če je λ lastna vrednost, potem je tudi $\bar{\lambda}$ lastna vrednost.

(To bi lahko dokazali tudi, če konjugiramo zvezo $Hx = \lambda x$.) Sedaj je dovolj dokazati: če je λ lastna vrednost, je tudi $-\lambda$ lastna vrednost. Izkoristimo namig.

Najprej ugotovimo, da je $J^{-1} = -J$, nato pa izračunamo $J^{-1}HJ = -H^T$. Sklepajmo. Naj bo (λ, x) lastni par matrike H , tj. $Hx = \lambda x$. Ker ima transponiranka matrike iste lastne vrednosti kot matrika sama, obstaja tudi tak $y \neq 0$, da je $H^T y = \lambda y$, torej tudi $-H^T y = -\lambda y$. Ker je v našem primeru matrika $-H^T$ podobna matriki H , je $-\lambda$ tudi njena lastna vrednost.

Literatura

- [1] Bor Plestenjak. Razširjen uvod v numerične metode, DMFA-založništvo, 2015.
- [2] Andrej Muhič. Skripta iz vaj NLA 2014/2015, elektronska različica, 2015.
- [3] Per Christian Hansen. Tikhonov Regularization in General Form, dostopno na <http://www.imm.dtu.dk/~pcha/DIP/chap8.pdf>
- [4] Bor Plestenjak. Nelinearni problemi lastnih vrednosti, skripta, 2010.
- [5] Marc R. Roussel, Delay-differential equations, dostopno na <http://people.uleth.ca/~roussel/nld/delay.pdf>
- [6] Hung-Yuan Fan, Wen-Wei Lin, and Paul Van Dooren. Normwise Scaling of Second Order Polynomial Matrices, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2004 26:1, 252-256
- [7] D. Steven Mackey, Niloufer Mackey, Christian Mehl, and Volker Mehrmann. Structured Polynomial Eigenvalue Problems: Good Vibrations from Good Linearizations. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 2006 28:4, 1029-1051
- [8] Gene H. Golub in Charles F. Van Loan. 1996. Matrix Computations (3rd Ed.). Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA.
- [9] Ivan Slapničar. Forward stable eigenvalue decomposition of real symmetric arrowhead matrices and rank-one modifications of diagonal matrices, 2017. Dostopno na <http://nbviewer.jupyter.org/github/ivanslapnicar/Ljubljana-2017/blob/master/src/Arrowhead.ipynb>