

1. kolokvij iz Mehanike

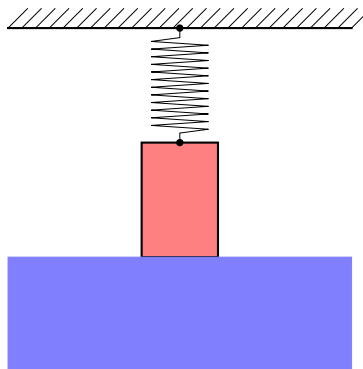
29. novembra 2017

1. Po krožnici s polmerom R_0 kroži točka, ki v obodni smeri pošilja žarek, ki pada na steno, ki se dotika krožnice. Določi kotno hitrost kroženja tako, da bo brzina žarka na steni konstantna.

2. Na vzmet, ki je pritrjena na strop pri-
pnemo tik nad gladino tekočine valj.
Vzmet se raztegne, valj se potopi in zaniha
okoli svoje ravnovesne lege.

- (a) Izračunaj ravnovesni položaj valja.
Tu privzami, da je vzmet dovolj
močna, da se valj ne potopi v celoti.
- (b) Sili vzgona, ki je enaka teži izpodri-
njene tekočine določi potencial.
- (c) Določi amplitudo in frekvenco niha-
nja.

Podatki: masa valja m , višina valja h ,
površina osnovne ploskve valja A , gostota
tekočine ρ , koeficient vzmeti k .



3. Na homogeno polkroglo z gostoto ρ in polmerom a postavimo polovico rotacijskega elipsoida s polosema a v ravnini stika in polosjo b v vertikalni smeri. Gostota elipsoida je $\rho/2$.
 - (a) Izračunaj masno središče polelipsoida.
 - (b) Določi pogoj na polos b , da bo ravnovesna lega stabilna.
4. Po gladki logaritemski spirali dani z $r = r_0 \exp k\varphi$ se giblje materialna točka pod vplivom sile teže v smeri osi y .
 - (a) Izračunaj ločno dolžino spirale.
 - (b) Določi ravnovesne položaje.
 - (c) Izračunaj harmonično aproksimacijo periode gibanja.

Rešitve

- Postavimo koordinatni sistem tako kot kaže skica. Položaj točke P_1 je dan s krajevnim vektorjem $R_0\vec{e}_r$, premica v smeri žarka pa z enačbo $R_0\vec{e}_r + s\vec{e}_\varphi$. Presečišče žarka s steno določa enačba $R_0\vec{e}_r + s\vec{e}_\varphi = x\vec{i} + R_0\vec{j}$. Od tod sledi

$$x = \frac{R_0(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Izraz se poenostavi, če vpeljemo novo spremenljivko $\theta = \pi/2 - \varphi$. Potem

$$x = \frac{R_0(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} = R_0 \tan \frac{\varphi}{2}.$$

Velja

$$v_0 = \dot{x} = \frac{R_0}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \dot{\theta}.$$

Iskana kotna hitrost je tako

$$\dot{\varphi} = -\dot{\theta} = -\frac{2v_0 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}{R_0}.$$

Dobili smo diferencialno enačbo za φ . Njena rešitev pri pogoju $\varphi(t=0) = 0$ je

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(1 + \frac{v_0}{R_0} t \right).$$

- (a) Os x usmerimo navpično navzdol in postavimo izhodišče na gladino tekočine. V ravnovesnem položaju je vsota sil enaka nič. Velja torej $mg - kx - \rho A x g = 0$. Tu smo upoštevali, da je sila vzgona enaka $-kx$, sila vzgona pa teži izpodrinjene tekočine, torej $-\rho A X g$. Pri zapisu ravnovesja smo predpostavili, da se gladina tekočine ne poviša in da valj v celoti ne potone. Ravnovesni raztezek je tako

$$x = \frac{mg}{k + \rho g A} = \frac{mg}{k + \hat{k}},$$

kjer smo označili $\hat{k} = \rho g A$.

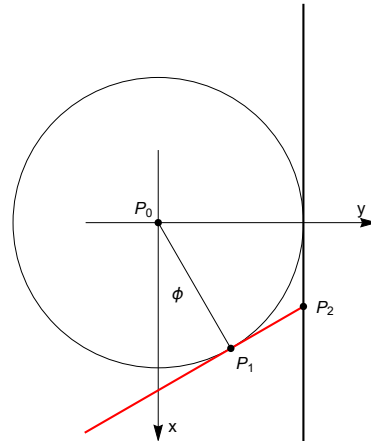
- Potencial sile vzgona je očitno $\frac{1}{2}\rho g A x^2 = \frac{1}{2}\hat{k}x^2$, kjer je x potopna globina.
- Enačba gibanja je

$$m\ddot{x} = mg - kx - \hat{k}x \Rightarrow m\ddot{x} + (k + \hat{k})x = mg.$$

Frekvenca je tako $\omega = \sqrt{(k + \hat{k})/m}$. Splošna rešitev enačbe gibanja je

$$x = A \cos(\omega t - \delta) + \frac{g}{\omega^2}.$$

Iz začetnih pogojev $x(t=0) = 0$ in $\dot{x}(t=0) = 0$ sledi $\delta = 0$ in $A = g/\omega^2 = \frac{mg}{k + \rho g A}$.



3. (a) Postavimo os z v smeri osi elipsoida z izhodiščem v središču polkroglo. Volumenski element elipsoida je $dV = A(z) dz = \pi r^2(z) dz$, kjer je r polmer kroga, ki ga dobimo s presekom elipsoida z ravnino vzporedno ravnini x, y . Ker je presek elipsoida z ravnino, ki vsebuje os z elipsa $r^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$, je $r = a\sqrt{1 - z^2/b^2}$. Potem je $dV = \pi a^2(1 - z^2/b^2) dz$. Potem je

$$\int_0^b z dV = \pi a^2 \int_0^b z(1 - z^2/b^2) dz = \frac{1}{4} \pi a^2 b^2$$

in

$$z_*^e = \frac{1}{V} \int_0^b z dV = \frac{3}{8} b.$$

Tu smo upoštevali, da je volumen elipsoida $\frac{2}{3} \pi a^2 b$.

- (b) Označimo s φ kot, ki ga oklepa os telesa z ravnino x, y . Potencialna energija telesa je $U = mgh$, kjer je h višina masnega središča. Velja $h = a + z_* \sin \varphi$, kjer je z_* koordinata z masnega središča telesa. Potem $U = mg(a + z_* \sin \varphi)$. Ravnovesni položaj je pri $U' = 0$, torej pri $\varphi = \pi/2$. Stabilnost določa drugi odvod potenciala, ki je enak $U'' = -mgz_* \sin \varphi$. Pogoji za stabilnost je tako $z_* < 0$.

Izračunajmo sedaj z_* . Dobimo ga po formuli

$$z_* = \frac{1}{m^e + m^k} (m^e z_*^e + m^k z_*^k),$$

kjer se zgornji indeks e nanaša na elipsoid, k pa na polkroglo. Upoštevamo, da je $z_*^k = -3a/8$. Po kratkem računu dobimo

$$z_* = \frac{3b^2 - 6a^2}{8(2a + b)}.$$

Pogoj za stabilnost je tako $b < a\sqrt{2}$.

4. (a) Izračunajmo dolžino loka spirale

$$s = \int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{\frac{d\vec{r}}{d\varphi} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi}} d\varphi = \int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = r_0 \sqrt{1 + k^2} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{k\varphi} d\varphi = \frac{r_0}{k} \sqrt{1 + k^2} e^{k\varphi}.$$

- (b) Potencial je

$$U = mgy = mgr \sin \varphi = mgr_0 e^{k\varphi} \sin \varphi = mg \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} s \sin \varphi = U_0 s \sin \varphi(s),$$

kjer na φ gledamo kot na funkcijo ločne dolžine s . Potem

$$U' = \frac{dU}{ds} = U_0 \left(\sin \varphi + s \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \right) = U_0 \left(\sin \varphi + \frac{1}{k} \cos \varphi \right).$$

Tu smo upoštevali prvo točko naloge, kjer smo izračunali $d\varphi/ds$. Ravnovesni položaji so rešitve enačbe

$$\tan \varphi = -\frac{1}{k}.$$

- (c) Uporabili bomo formulo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(s_0)}},$$

kjer je s_0 ravnovesna ločna dolžina. Izračunajmo

$$U'' = U_0 \left(\cos \varphi - \frac{1}{k} \sin \varphi \right) \frac{d\varphi}{ds}.$$

Potem

$$U''(s_0) = U_0(1 + k^{-2}) \cos \varphi \frac{1}{r_0 \sqrt{1 + k^2} e^{k\varphi}} = \frac{mg}{k} \frac{\cos \varphi(s_0)}{r(\varphi(s_0))}.$$

Če vstavimo dobljeno v izraz za periodo, dobimo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{kr}{g \cos \varphi}}.$$