

2. kolokvij iz Mehanike

10. januarja 2018

1. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = a + b\varphi$.
 - (a) Določi silo.
 - (b) Določi trajektorijo pri pogoju $r(t = 0) = r_0$ in $\varphi(t = 0) = 0$.
2. Točka se giblje v polju centralne sile pod vplivom potenciala $V(r) = -\alpha e^{-k^2 r^2}$, $\alpha > 0$. Določi pogoj na vrtilno količino, da bo gibanje omejeno.
3. Ravno vodilo enakomerno kroži s kotno hitrostjo ω okoli točke O , po vodilu pa okoli središčne lege, ki je v točki O , harmonično niha točka s frekvenco Ω .
 - (a) Določi vektorje hitrosti, pospeška in Coriolisovega pospeška točke na vodilu.
 - (b) Določi njihove velikosti v središčni legi in obeh skrajnih legah nihanja.
4. Točka se giblje po gladki $y = f(x)$, ($f(x) > 0$), ki se enakomerno vrti okrog osi y . Na točko deluje sila teže v smeri negativne osi y .
 - (a) Zapiši Newtonovo enačbo v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti hkrati s krivuljo.
 - (b) Zapiši enačbo, ki določa ravnovesni položaj. V posebnem primeru $f(x) = \alpha x^4$ določi ravnovesne položaje.
 - (c) Pokaži, da je
$$\frac{1}{2}x'(t)^2 (1 + f'(x(t))^2) + gf(x(t)) - \frac{1}{2}\omega^2 x(t)^2$$
konstanta gibanja.

Rešitve

1. (a) Uporabili bomo Binetovo formulo. Izračunajmo $u = 1/r = 1/(a + \varphi)$. Potem

$$u' = -\frac{b}{(a + \varphi)^2} \quad \text{in} \quad u'' = \frac{2b^2}{(a + \varphi)^3}.$$

Potem

$$a_r = -C_0^2 u^2 (u + u'') = -C_0^2 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2b^2}{r^5} \right)$$

in

$$\vec{F} = -mC_0^2 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2b^2}{r^5} \right) \vec{e}_r.$$

Potencial sile je

$$V = -\frac{mC_0^2}{2r^2} - \frac{mC_0^2 b^2}{2r^4}.$$

- (b) Efektivni potencial je

$$U = \frac{mC_0^2}{2r^2} + V = \frac{mC_0^2 b^2}{2r^4}.$$

Iz slike efektivnega potenciala vidimo, da so za nenegativno energijo tiri neomejeni. Ker je $r = a + b\varphi$, je

$$\dot{r} = b\dot{\varphi} = \frac{bC_0}{r^2},$$

saj je dvojna plosčinska hitrost konstanta gibanja. Iz energijske enačbe potem sledi $E_0 = 0$ in točka pri C_0 ubeži v neskončnost. Zgornjo enačbo rešimo in dobimo

$$r = (3bC_0 t + r_0^2)^{1/3}.$$

Potem je

$$\varphi = \frac{r - a}{b} = \frac{1}{b} \left((3bC_0 t + r_0^2)^{1/3} - r_0 \right).$$

Tu smo upoštevali, da je $a = r_0$, saj je $\varphi(t = 0) = 0$.

2. Pokazati moramo, da ima efektivni potencial lokalni minimum. Efektivni potencial je

$$U = \frac{l^2}{2mr^2} - \alpha e^{-k^2 r^2}.$$

Odvod je

$$U' = -\frac{l^2}{mr^3} + 2\alpha r k^2 e^{-k^2 r^2}.$$

Pogoj za ekstrem je $U' = 0$. Od tod dobimo enačbo

$$x^4 e^{-x^2} = \frac{l^2 k^2}{2\alpha},$$

kjer smo zapisali $x = kr$. Pogoj, da nastopi ekstrem je, da je maksimum funkcije $f(x) = x^4 e^{-x^2}$ večji od $l^2 k^2 / (2\alpha)$. Izračunajmo

$$f'(x) = e^{-x^2} (4x^3 - 2x^5).$$

Maksimum nastopi pri $x^2 = 2$ z vrednostjo $f(2) = 4e^{-2}$. Pogoj za omejenost na l je tako

$$|l| \leq \frac{2\sqrt{2m\alpha}}{ke}.$$

3. (a) Postavimo RKS z baznim vektorjem $\vec{e}_1$ v smeri vodila. Krajevni vektor do točke na vodilu je $\vec{\zeta} = A \cos(\Omega t - \delta) \vec{e}_1$. Potem je

$$\vec{v}_{\text{rel}} = -A\Omega \sin(\Omega t - \delta) \vec{e}_1 \quad \text{in} \quad \vec{a}_{\text{rel}} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \delta) \vec{e}_1.$$

Nadalje je vektor kotne hitrosti $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Potem

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = -A\omega\Omega \sin(\Omega t - \delta) \vec{e}_2 \quad \text{in} \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) = -A\omega^2 \cos(\Omega t - \delta) \vec{e}_1.$$

Potem so vektor hitrosti, pospeška in Coriolisovega pospeška enaki

$$\vec{v} = \omega \times \vec{\zeta} + \vec{v}_{\text{rel}} = -A\Omega \sin(\Omega t - \delta) \vec{e}_1 + A\omega \cos(\Omega t - \delta) \vec{e}_2$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}} = -A(\omega^2 + \Omega^2) \cos(\Omega t - \delta) \vec{e}_1 - 2A\omega\Omega \sin(\Omega t - \delta) \vec{e}_2$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = -2A\omega\Omega \sin(\Omega t - \delta) \vec{e}_2$$

- (b) V središčni legi je $\cos(\Omega t - \delta) = 0$ in $\sin(\Omega t - \delta) = \pm 1$. Potem

$$|\vec{v}| = |A\Omega|, \quad |\vec{a}_c| = 2|A\omega\Omega| \quad \text{in} \quad |\vec{a}| = 2|A\omega\Omega|.$$

V skrajni legi pa je $\cos(\Omega t - \delta) = \pm 1$ in $\sin(\Omega t - \delta) = 0$ in

$$|\vec{v}| = |A\omega|, \quad |\vec{a}_c| = 0 \quad \text{in} \quad |\vec{a}| = 2|A|(\omega^2 + \Omega^2).$$

4. (a) Postavimo RKS, ki se vrtili okrog osi y hkrati z grafom krivulje. Newtonova enačba v RKS je

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = m\vec{g} + \vec{S} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}.$$

Sila teže je $m\vec{g} = -mg\vec{j}$, sila vezi pa $\vec{S} = S\vec{n} + S_3\vec{k}$. Tu je $\vec{\omega} = \omega\vec{j}$, $\vec{n}$ pa je normala na krivuljo dana z

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \left(-f'(x)\vec{i} + \vec{j} \right).$$

- (b) V ravnovesnem položaju $\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{0}$. Tako dobimo dve enačbi

$$0 = -\frac{Sf'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} + m\omega^2 x,$$

$$0 = \frac{S}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} - mg.$$

Od tod dobimo enačbo $mgf'(x) = m\omega^2 x$. V posebnem primeru, ko je $f(x) = \alpha x^4$, sta rešitvi $x = 0$ in $x = \pm \omega/(2\sqrt{\alpha g})$.

- (c) Pri gibanju je $\vec{v}_{\text{rel}} = (\vec{i} + f'(x)\vec{j})\dot{x}$ in $\vec{a}_{\text{rel}} = (\vec{i} + f'(x)\vec{j})\ddot{x} + \dot{x}^2 f''(x)\vec{j}$. Newtonova enačba po komponentah je

$$m\ddot{x} = -\frac{Sf'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} + m\omega^2 x,$$

$$m(\dot{x}^2 f''(x) + f'(x)\ddot{x}) = \frac{S}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} - mg.$$

Iz ene enačbe izrazimo S in vstavimo v drugo. Dobimo

$$\dot{x}^2 f''(x) + f'(x)\ddot{x} = -gf' + \omega^2 x - \ddot{x}.$$

Če pomnožimo dobljeno enačbo z $\dot{x}$, vidimo, da je

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 (1 + f'(x))^2 + gf(x) - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \text{konst.}$$