1. izpit iz Mehanike

7. februarja 2018

1. Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala $U = U_0 \tanh^2 \alpha x$, $U_0 > 0$ in $\alpha > 0$.

   (a) Kvalitativno obravnavaj možna gibanja.

   (b) Izračunaj periodo harmonične aproksimacije nihanja okoli ravnovesne lege.

2. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = r_0(1 + a\varphi)^2$.

   (a) Določi silo.

   (b) Izračunaj efektivni potencial.

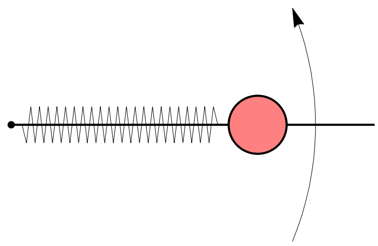
   (c) Določi trajektorijo pri pogoju $\varphi(t = 0) = 0$.

3. Ravno vodilo enakomerno kroži s kotno hitrostjo ω okrog navpične osi. Po vodilu pa je brez trenja gibljiva materialna točka z maso m, ki je pripeta z vzmetjo, glej skico.

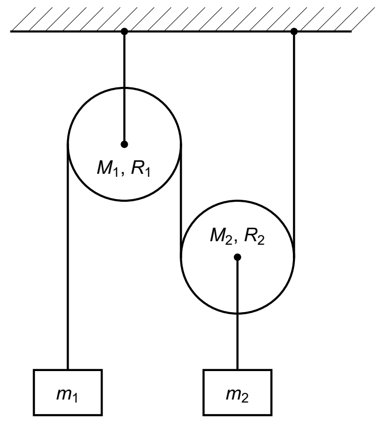
   (a) Zapiši Newtonovo enačbo v RKS, ki se vrti hkrati z vodilom.

   (b) Določi ravnovesni položaj točke na vodilu. Kdaj je stabilen?

   (c) Določi frekvenco nihanja okoli stabilne lege.

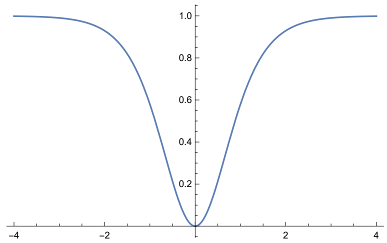


4. Za škripčevje na sliki določi gibanje mas m_1 in m_2.



Rešitve

1. (a) Prvo narišemo skico potenciala. Očitno je potencial simetričen glede na os y. Funkcija monotono narašča za $x > 0$. Njen globalni minimum je $x = 0$. Ker je $\lim_{x\to\infty} U(x) = U_0$, je gibanje omejeno za $E_0 \in [0, U_0)$ in neomejeno za $E_0 \geq U_0$.



(b) Perioda harmonične aproksimacije je $T = 2\pi\sqrt{m/U''(x=0)}$. Izračunajmo

$$U' = 2\alpha U_0 \tanh(\alpha x)\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}$$

in

$$U'' = 2U_0\alpha^2\left(\frac{1}{\cosh^4(\alpha x)} - 2\tanh^2(\alpha x))\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}\right).$$

Potem

$$T = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{U_0}}.$$

2. (a) Silo določimo z uporabo Binetove enačbe $F = ma_r = -mC_0^2u^2\,(u + u'')$. Za $u = 1/r = 1/(r_0(1+a\varphi)^2)$ izračunajmo

$$u' = \frac{-2a}{r_0(1+a\varphi)^3} \quad \text{in} \quad u'' = \frac{6a^2}{r_0(1+a\varphi)^4}.$$

Potem

$$F = -mC_0^2\left(\frac{1}{r^3} + \frac{6a^2r_0}{r^4}\right).$$

(b) Efektivni potencial je

$$U = \frac{mC_0^2}{2r^2} + V,$$

kjer je V potencial dane sile dan z izrazom

$$V(r) = -\int_\infty^r F\,dr = -\frac{mC_0^2}{2r^2} - \frac{2mC_0^2a^2r_0}{r^3}.$$

Potem

$$U = -\frac{2mC_0^2a^2r_0}{r^3}.$$

(c) Trajektorijo $\varphi = \varphi(t)$ dobimo iz enačbe $r^2\varphi' = C_0$. Upoštevajmo, da je $r = r_0(1+a\varphi)^2$. Potem dobimo diferencialno enačbo

$$r_0^2(1+a\varphi)^4\varphi' = C_0$$

in od tod

$$C_0t = r_0^2\frac{1}{5a}(1+a\varphi)^5 + C_1.$$

Konstanto C_1 določimo iz zaçetnega pogoja $\varphi(t=0)=0$. Potem $C_1 = -r_0^2/(5a)$ in

$$\varphi = \frac{1}{a}\left(1+\frac{5aC_0t}{r_0}\right)^{1/5}.$$

Vstavimo dobljeno v enačbo $r = r_0(1+a\varphi)^2$ in tako dobimo še $r = r(t)$.

3. (a) Postavimo RKS z osjo $\vec{\epsilon}_1$ v smeri osi vodila, in osjo $\vec{\epsilon}_3$ v smeri osi $\vec{k}$ okrog katere se vrti vodilo. Potem je krajevni vektor do točke v RKS $\vec{\zeta} = \zeta\vec{\epsilon}_1$, vektor kotne hitrosti pa $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. Na točko deluje sila vzmeti $\vec{F} = -k(\zeta-\zeta_0)\vec{\epsilon}_1$, sila teže $m\vec{g} = -mg\vec{\epsilon}_3$ in sila vezi $\vec{S}$, ki je pravokotna na vodilo. Tu je k koeficient vzmeti, ζ_0 pa nevtralna dolžina vzmeti. Newtonova enačba v RKS je

$$m\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{\mathrm{rel}}.$$

Tu smo upošteali, da imata RKS in AKS skupno izhodišče in da se RKS enakomerno vrti. Po krajšem računu dobimo

$$m\ddot{\zeta}\vec{\epsilon}_1 = -k(\zeta-\zeta_0)\vec{\epsilon}_1 - mg\vec{\epsilon}_3 + \vec{S} + m\omega^2\zeta\vec{\epsilon}_1 - 2m\omega\dot{\zeta}a\vec{\epsilon}_2.$$

V smeri vodila se enačba glasi

$$m\ddot{\zeta} = -k(\zeta-\zeta_0) + m\omega^2\zeta = (m\omega^2-k)\zeta + k\zeta_0.$$

(b) Ravnovesna enačba je

$$0 = (m\omega^2-k)\zeta + k\zeta_0.$$

Od tod dobimo za ravnovesni položaj

$$\zeta = \frac{k\zeta_0}{k-m\omega^2}.$$

Tu smo privzeli, da je $k > m\omega^2$, saj v nasprotnem primeru ravnovesna lega ne obstaja.

(c) Enačba gibanja v smeri vodila je enačba harmoničnega gibanja. Frekvenca gibanja je

$$\Omega = \sqrt{k-m\omega^2}.$$

4. Škripčevje je sistem štirih togih teles, dveh škripcev in dveh mas. Označimo položja mas m_1 in m_2 z x in y in identificirajmo vse sile na posamezna toga telesa, glej skico. Masi m_1 in m_2 obravnavamo kot točkasti telesi. Njuni gibalni enačbi sta

$$m_1\ddot{x} = m_1g - S_1 \quad \text{in} \quad m_2\ddot{y} = m_2g - S_3.$$

Gibalni enačbi za škripca pa so

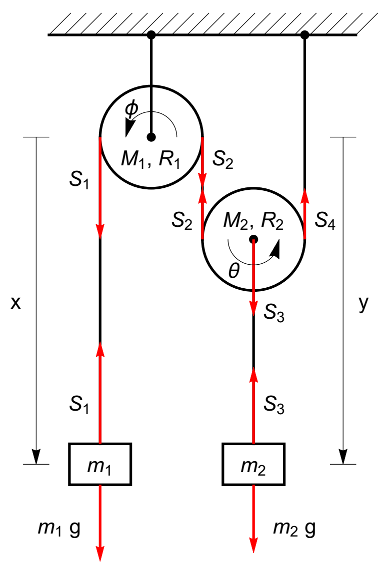
$$\frac{1}{2}M_1R_1^2\ddot{\varphi} = R_1(S_1-S_2),$$

$$\frac{1}{2}M_2R_2^2\ddot{\theta} = R_2(S_4-S_2)$$

in

$$M_2\ddot{y} = M_2g + S_3 - S_2 - S_4.$$

Tu nismo zapisali enačbo gibanja središča prvega škripca, ki miruje.



Zapisali smo pet enačb za osem neznank x, y, φ, θ, S_1, S_2, S_3 in S_4. Da bo sistem zaprt potrebujemo še tri kinematične enačbe. Pri predpostavki, da vrv na škripcih ne zdrsuje velja $\dot{x} = R_1\dot{\varphi}$ in $\dot{y} = R_1\dot{\theta}$. Nadalje je dolžina vrvice l konstantna. Velja torej $l = x + \pi R_1 + 2y + \pi R_2 + C$, kjer je konstanta C dvisna od dolžine pripetja prvega škrica in dolžine pripetja druge mase na drugi škripec. Potem $0 = \dot{x} + 2\dot{y}$. Po krajšem računu dobimo

$$\ddot{x} = \frac{4g(2m_1 - m_2 - M_2)}{8m_1 + 4M_1 + 2m_2 + 3M_2}$$

in seveda $\ddot{y} = -\ddot{x}/2$. Vidimo, da se masa m_1 spušča, če je $2m_1 > m_2 + M_2$.