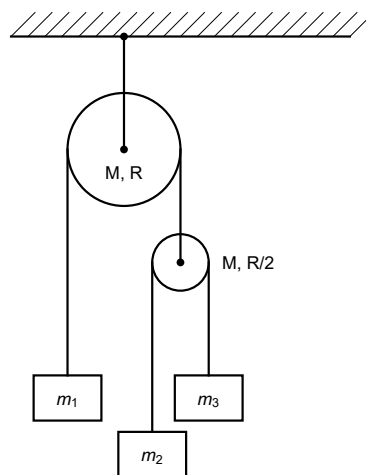


2. izpit iz Mehanike

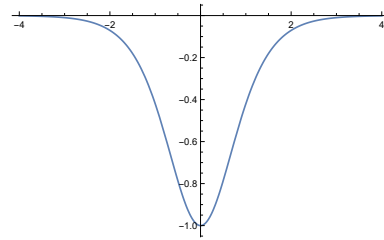
27. junija 2018

1. Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala $U = -U_0 \cosh^{-2} \alpha x$, $U_0 > 0$ in $\alpha > 0$.
 - (a) Skiciraj potencial in kvalitativno obravnavaj možna gibanja.
 - (b) Izračunaj periodo harmonične aproksimacije nihanja okoli ravnovesne lege.
 - (c) Za omejeno gibanje izračunaj periodo gibanja in primerjaj dobljeni rezultat s harmonično aproksimacijo.
2. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = r_0 \exp(-a\varphi)$, $a > 0$.
 - (a) Določi silo.
 - (b) Izračunaj efektivni potencial.
 - (c) Določi dvojno ploščinsko hitrost C_0 , če točka iz začetne razdalje $r(t=0) = r_0$ pride v center sile v času t_0 .
3. Po krogu, ki se enakomerno vrti okrog osi skozi njegovo središče se iz središča proti obodu giblje materialna točka.
 - (a) Zapiši Newtonovo enačbo v RKS, ki se vrti hkrati s krogom. Nasvet: uporabi polarni KS.
 - (b) V ravnini kroga na točko deluje sila $\vec{F}$, ki je pravokotna na vektor relativne hitrosti, njena velikosti pa je $|\vec{F}| = mk|\vec{v}_{rel}|$. Reši enačbe gibanja za $k = 0$ in določi tir v AKS.
 - (c) Naj bo $k \neq 0$. Reši enačbe gibanja.
4. Za škripčevje na sliki
 - (a) zapiši enačbe gibanja;
 - (b) za primer $m_1 = 5M$, $m_2 = 2M$ in $m_3 = M$ določi gibanje mas m_1 , m_2 in m_3 .



Rešitve

1. (a) Prvo narišemo skico potenciala. Očitno je potencial simetričen glede na os y . Njen globalni minimum je pri $x = 0$ in ima vrednost U_0 . Ker je $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$, je gibanje omejeno za $E_0 \in (-\infty, 0)$ in neomejeno za $E_0 \geq 0$.



- (b) Perioda harmonične aproksimacije je $T = 2\pi\sqrt{m/U''(x=0)}$. Izračunajmo

$$U' = 2\alpha U_0 \frac{\sinh \alpha x}{\cosh^3 \alpha x}$$

in

$$U'' = U_0 \alpha^2 (-6 \cosh^{-4} \alpha x \sinh^2 \alpha x + 2 \cosh^{-2} \alpha x).$$

Potem

$$T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{U_0}}.$$

- (c) Perioda gibanja je

$$T = \sqrt{2m} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E_0 + U_0 \cosh^{-2} \alpha x}},$$

kjer je $E_0 < 0$ energijska nivojnica, x_0 pa je koordinata x , kjer energijska nivojnica seče potencial. Integral prepisemo v

$$T = \sqrt{2m} \int_{-a}^a \frac{\cosh \alpha x dx}{\sqrt{E_0 \cosh^2 \alpha x + U_0}}.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $u = \sinh \alpha x$. Potem

$$T = \sqrt{2m} \frac{1}{\alpha} \int_{-u_0}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{E_0(1+u^2) + U_0}} = \frac{\sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{-E_0}} \int_{-u_0}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{-\frac{U_0}{E_0} - 1 - u^2}} = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{-E_0}}.$$

Vidimo, da je harmonična aproksimacija točna pri $E_0 = U_0$.

2. (a) Silo določimo z uporabo Binetove enačbe $F = ma_r = -mC_0^2 u^2 (u + u'')$. Za $u = 1/r = e^{a\varphi}/r_0$ izračunajmo

$$u' = ae^{a\varphi}/r_0 \quad \text{in} \quad u'' = a^2 e^{a\varphi}/r_0.$$

Potem

$$F = -mC_0^2 (1 + a^2) \frac{1}{r^3}.$$

- (b) Efektivni potencial je

$$U = \frac{mC_0^2}{2r^2} + V,$$

kjer je V potencial dane sile dan z izrazom

$$V(r) = - \int_{\infty}^r F dr = -mC_0^2 (1 + a^2) \frac{1}{2r^2}.$$

Potem

$$U = -mC_0^2 a^2 \frac{1}{2r^2}.$$

- (c) Velja enakost $\frac{1}{2}C_0t_0 = A$, kjer je A ploščina lika, ki ga opiše radij vektor od začetne lege do končne. Izračunajmo

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\infty r^2 d\varphi = \frac{1}{2} r_0^2 \int_0^\infty e^{-2a\varphi} d\varphi = \frac{1}{4a} r_0^2.$$

Potem

$$C_0 = \frac{2A}{t_0} = \frac{r_0^2}{2at_0}.$$

3. (a) RKS, ki se vrti hkrati s krogom postavimo v njegovo središče. Krajevni vektor do točke v RKS je $\vec{\zeta} = r\vec{e}_r$, njegova relativna hitrost pa je $\vec{v}_{rel} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Newtonova enačba v RKS je

$$m\vec{a}_{rel} = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}.$$

Izračunajmo

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) = -r\omega^2\vec{e}_r \quad \text{in} \quad \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \omega \left(-r\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{r}\vec{e}_\theta \right).$$

Potem

$$\begin{aligned} m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) &= F_r + m\omega^2 r + 2m\omega r\dot{\theta}, \\ m \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) &= F_\theta - 2m\omega\dot{r}, \end{aligned}$$

kjer smo rezultanto sil na točko zapisali $\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta$.

- (b) Ker je sila pravokotna na $\vec{v}_{rel}$ in je po velikosti enaka $mk|\vec{v}_{rel}|$, je

$$\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta = m\hat{k} \left(r\dot{\theta}\vec{e}_r - \dot{r}\vec{e}_\theta \right),$$

kjer je $|\hat{k}| = k$. Vstavimo silo v obodno komponento pospeška. Po krajšanju z m dobimo

$$\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) = -\hat{k}\dot{r} - 2\omega\dot{r} = -(\hat{k} + 2\omega)\dot{r}.$$

Enačbo pomnožimo z r . Dobljena enačba je ekvivalentna enačbi

$$\frac{d}{dt} \left(r^2\dot{\theta} \right) = -\frac{1}{2}(\hat{k} + 2\omega) \frac{d}{dt} r^2.$$

Potem

$$r^2\dot{\theta} = -\frac{1}{2}(\hat{k} + 2\omega)r^2 + C.$$

V začetni legi $r = 0$. Od tod sledi $C = 0$ in

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{2}(\hat{k} + 2\omega).$$

Vstavimo dobljeno v Newtonovo enačbo v radialni smeri. Potem

$$\ddot{r} - r\frac{1}{4}(\hat{k} + 2\omega)^2 = -\frac{1}{2}\hat{k}r(\hat{k} + 2\omega) + \omega^2 r - \omega r(\hat{k} + 2\omega).$$

Od tod

$$0 = \ddot{r} + r \left(\frac{1}{4}(\hat{k} + 2\omega)^2 - \omega^2 \right) = \ddot{r} + \frac{1}{4}\hat{k}(\hat{k} + 2\omega)r.$$

- (c) Če je $\hat{k} = 0$, je $\ddot{r} = 0$ in $\dot{\theta} = -\omega$. V AKS točka potuje premočrtno iz središča kroga. Za $\hat{k} \neq 0$ ločimo primera

$$\frac{1}{4}\hat{k}(\hat{k} + 2\omega) > 0 \quad \text{in} \quad \frac{1}{4}\hat{k}(\hat{k} + 2\omega) < 0.$$

Označimo

$$\alpha^2 = \left| \frac{1}{4}\hat{k}(\hat{k} + 2\omega) \right|.$$

Tako dobimo enačbi

$$\ddot{r} + \alpha^2 r = 0 \quad \text{oziroma} \quad \ddot{r} - \alpha^2 r = 0.$$

Rešitev prve, pri pogoju $r(0) = 0$ je $r = A \sin \alpha t$, druge pa $r = A \sinh \alpha t$. Konstanto A določa začetna hitrost v izhodišču. Vidimo, da v drugem primeru točka vedno zapusti krog, v prvem pa ne vedno.

4. (a) Označimo razdalje do stropa, z x razdaljo mase m_1 , y razdaljo manjšega škripca, u razdaljo mase m_2 in v razdaljo mase m_3 . Sile vrvic na mase m_1 , m_2 in m_3 označimo z S_1 , S_2 in S_3 , silo vrvice na manjši škripec pa z S_4 . Enačbe gibanja so

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= m_1 g - S_1, \\ m_2 (\ddot{y} + \ddot{u}) &= m_2 g - S_2, \\ m_3 (\ddot{y} + \ddot{v}) &= m_3 g - S_3, \\ M \ddot{y} &= M g + S_2 + S_3 - S_4, \\ \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\varphi} &= R(S_1 - S_4), \\ \frac{1}{2} M (R/2)^2 \ddot{\theta} &= \frac{1}{2} R(S_2 - S_3), \end{aligned}$$

kjer je φ rotacija večjega škripca, θ pa manjšega. Sistem dopolnimo s kinematičnimi enačbami

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{u} + \ddot{v} &= 0, \\ R \dot{\varphi} &= \dot{x}, \\ \frac{1}{2} R \dot{\theta} &= \dot{u}, \end{aligned}$$

Zapisali smo 10 enačba za 10 neznank x , y , u , v , φ , θ , S_1 , S_2 , S_3 in S_4 . Vidimo, da se uteži gibljejo enakomerno pospešeno.

- (b) Sistem rešimo za primer $m_1 = 5M$, $m_2 = 2M$ in $m_3 = M$. Pospeški mas so

$$\ddot{x} = \frac{6g}{43}, \quad \ddot{y} = -\frac{6g}{43}, \quad \ddot{u} = \frac{14g}{43}, \quad \ddot{v} = -\frac{14g}{43}.$$

Masa m_1 potuje navzdol, navzdol potuje tudi masa m_2 s pospeškom $\ddot{y} + \ddot{u} = 8g/43$.