

Kombinatorika: 1. izpit

1. 2. 2012

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Naj $p_k(n)$ označuje število particij (razčlenitev) števila n s k deli in naj $q_k(n)$ označuje število particij (razčlenitev) števila n s k različnimi deli. Dokaži, da je

$$q_k \left(n + \binom{k}{2} \right) = p_k(n).$$

2. naloga (25 točk)

Naj a_n označuje število n -ciklov π v $\mathfrak{S}_n$, za katere velja $\pi(i) \not\equiv i + 1 \pmod{n}$ za $i = 1, \dots, n$. Tako je $a_4 = 1$, ker je za $n = 4$ edini tak cikel $(1, 4, 3, 2)$. Poišči a_n .

3. naloga (25 točk)

Dana je rekurzivna enačba

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = C_n, \quad a_0 = a_1 = 0,$$

kjer je $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ Catalanovo število.

a) Izračunaj $F(x)$, običajno rodovno funkcijo za zaporedje $(a_n)_{n \geq 0}$.
Namig: Običajna rodovna funkcija za $(C_n)_{n \geq 0}$ je $(1 - \sqrt{1 - 4x})/2x$.

b) Določi asimptotiko a_n . Se pravi, določi A, B, C , za katere velja

$$a_n \sim An^B C^n.$$

4. naloga (25 točk)

a) Poišči vseh 12 simetrij tetraedra.

Namig: Kaj je kompozitum rotacij okoli dveh različnih osi?

b) Izračunaj $Z_G(t_1, t_2, t_3, t_4)$, kjer je G grupa simetrij tetraedra, ki deluje na ogliščih tetraedra.