

Kombinatorika: 1. izpit

29. 1. 2018

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Naj bo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ particija. Dokaži naslednje:

a) $\sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i = \sum_{i \geq 1} \binom{\lambda'_i}{2},$

b) $\sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{\lambda_{2i-1}}{2} \right\rfloor = \sum_{i \geq 1} \left\lceil \frac{\lambda'_{2i}}{2} \right\rceil.$

2. naloga (25 točk)

Denimo, da $2n$ ljudi sedi v krogu. Upoštevaj, da imajo ljudje imena.

a) Naj $c_{n,k}$ označuje število izborov k parov sosednjih ljudi izmed $2n$ ljudi v krogu. Dokaži

$$c_{n,k} = \binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k}.$$

b) Denimo, da imamo k fiksiranih parov sosedov. Naj $a_{n,k}$ označuje število delitev preostalih $2n-2k$ ljudi v $n-k$ parov (brez omejitev glede sosednosti). Dokaži

$$a_{n,k} = (2n-2k-1)!!.$$

c) Določi število delitev $2n$ ljudi v krogu v n parov, če noben par ni sestavljen iz sosednjih ljudi. Odgovor izrazi kot končno vsoto.

3. naloga (30 točk)

Zanima nas a_n , število poti med točkama $(0,0)$ in (n,n) s koraki $(0,1)$, $(1,0)$ in $(1,1)$.

a) Dokaži, da je

$$a_n = \sum_k \binom{n+k}{k, k, n-k}$$

b) S pomočjo zgornje zveze in enakosti

$$\frac{1}{(1-x)^{2k+1}} = \sum_n \binom{n+2k}{2k} x^n, \quad \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_k \binom{2k}{k} x^k$$

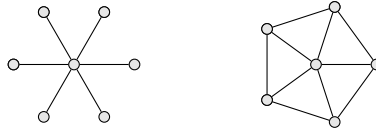
poišči ekspliciten izraz za $\sum_n a_n x^n$.

c) Poišči asimptotiko zaporedja $(a_n)_n$.

4. naloga (25 točk)

Naj d_n označuje število označenih grafov na n vozliščih, katerih povezane komponente so izomorfne zvezdam in kolesom. Na primer, $d_0 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, $d_4 = 8$, $d_5 = 20$ in $d_6 = 78$.

Spomnimo se, da je zvezda $K_{1,n}$, $n \geq 3$, graf z $n + 1$ vozlišči. Eno izmed njih ima n sosedov, vsa ostala pa le po enega. Kolo W_n , $n \geq 3$, je graf z $n + 1$ vozlišči, n izmed njih tvori cikel, eno (centralno) vozlišče pa je povezano z vsemi vozlišči na ciklu. Spodnja slika prikazuje neoznačena grafa $K_{1,6}$ in W_5 .



a) Določi eksponentno rodovno funkcijo zaporedja $(d_n)_n$.

b) Naj bo $F(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!}$, $H(x) = \sum_n b_n \frac{x^n}{n!}$ in $H(x) = e^{F(x)}$. Dokaži, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$nb_n = \sum_k \binom{n}{k} k a_k b_{n-k}.$$

Namig: Kakšna je eksponentna rodovna funkcija zaporedja $(nb_n)_n$?

c) Ali lahko določiš rekurzivno enačbo za zaporedje $(d_n)_n$?