

Kombinatorika: 2. izpit

18. 6. 2012

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Označimo s P_n množico razčlenitev (particij) števila n in s P množico vseh razčlenitev (se pravi $P = \bigcup_{n \geq 0} P_n$). Na P vpeljemo relacijo *vsebovanosti*: $\lambda \subseteq \mu$, če je $\lambda_i \leq \mu_i$ za vsak i (pri tem je $\lambda_i = 0$ za $i > \ell(\lambda)$). Na P_n vpeljemo relacijo *dominance*: $\lambda \leq \mu$, če je $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i$ za vsak $i \geq 1$. Dokaži, da sta $(P, \subseteq)$ in $(P_n, \leq)$ mreži.

2. naloga (25 točk)

Naj $a_k(n)$ označuje število k -teric $(A_1, \dots, A_k)$, $A_i \subseteq [n]$, za katere je $A_i \not\subseteq A_j$ za $i \neq j$. Z drugimi besedami, $a_k(n)$ je število urejenih antiverig velikosti k v Boolovi algebri B_n . Dokaži, da velja:

$$A_1(n) = 2^n$$

$$A_2(n) = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$$

$$A_3(n) = 8^n - 6 \cdot 6^n + 6 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^n - 6 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n$$

3. naloga (25 točk)

Otroci igrajo naslednjo igro: razdelijo se na skupine vsaj dveh otrok; en otrok v vsaki skupini se postavi v sredino kroga, ostali otroci v skupini pa sklenejo krog okoli njega. (Če sta samo dva otroka v skupini, je eden od njiju v sredini, drugi pa sklene krog okoli prvega.) Naj bo a_n število načinov možnih načinov igranja te igre, če jo igra n otrok. Preveri, da je $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 20$. Izračunaj eksponentno rodovno funkcijo zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. naloga (25 točk)

Naj bosta dani različni praštevili a in b . Naša naloga je izračunati f_n , število načinov, kako izplačati znesek n centov s kovancema za a centov in b centov.

a) Dokaži, da je

$$\sum_n f_n x^n = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)}.$$

b) Razvij racionalno funkcijo iz točke a v potenčno vrsto in dokaži, da je

$$f_n = \frac{n}{ab} + \frac{a+b}{2ab} + g(n),$$

kjer je g periodična funkcija, $g(n+ab) = g(n)$, s povprečjem 0.