

Kombinatorika

21. 9. 2012

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Dokaži, da velja

$$\sum_{n_1, \dots, n_k \geq 0} \min(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} = \frac{x_1 \cdots x_k}{(1-x_1) \cdots (1-x_k)(1-x_1 \cdots x_k)}.$$

2. naloga (25 točk)

Naj bo P lokalno končna delno urejena množica. Definirajmo $\lambda \in I(P, K)$ takole:

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1 & : x = y \text{ ali } x \leq y \\ 0 & : \text{sicer} \end{cases}$$

Opiši pomen naslednjih vrednosti za elementa $x, y \in P$, $x \leq y$:

1. $((\lambda - 1) \cdot \zeta)(x, y)$,
2. $(\zeta \cdot (\lambda - 1))(x, y)$,
3. $(\lambda - 1)^k(x, y)$, kjer je k naravno število,
4. $(2 - \lambda)^{-1}(x, y)$.

3. naloga (25 točk)

Poišči zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ki ustreza pogojem

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 4a_n = -9 \cdot (-1)^n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 23.$$

4. naloga (25 točk)

a) Opiši komponente (enostavnega neusmerjenega) grafa, v katerem imajo vse točke stopnjo 1 ali 2.

b) Naj bo a_n število grafov na $[n]$, v katerih imajo vse točke stopnjo 1 ali 2. Izračunaj eksponentno rodovno funkcijo za a_n .