

Kombinatorika: 3. izpit

7. 9. 2016

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

a) Preštej vse permutacije π dolžine n , v katerih je vsaj kakšno liho število $1 \leq i \leq n$ fiksna točka, tj. $\pi(i) = i$.

b) Preštej vse permutacije π dolžine n , v katerih je vsaj kakšno liho število in vsaj kakšno sodo število fiksna točka.

2. naloga (30 točk)

Na množici multimnožic M z elementi iz $\mathbb{N}$ definiramo relacijo vsebovanosti: $S \subseteq T$, če vsebuje S manj ali enako kopij elementa i kot T za vsak i .

Dokaži, da je $(M, \subseteq)$ lokalno končna delno urejena množica. Dokaži, da je njena Möbiusova funkcija

$$\mu(S, T) = \begin{cases} 0 & : T \setminus S \text{ vsebuje vsaj dve kopiji nekega elementa} \\ (-1)^{|T \setminus S|} & : T \setminus S \text{ je množica} \end{cases}$$

Kateri znani delno urejeni množici je izomorfna M ?

3. naloga (45 točk)

Družine se ena za drugo selijo v vrsto n vrstnih hiš. Ker so stene med hišami zelo tanke, ne želijo živeti v sosednjih hišah. Vsaka družina se vseli v naključno prosto hišo, ki ni sosednja z že naseljeno hišo.

Označimo z a_n pričakovano število zasedenih hiš, ko ni na voljo več nobena hiša brez sosedov.

a) Dokaži, da je $a_1 = a_2 = 1$ in $a_3 = 5/3$. Dokaži, da je $n/3 \leq a_n \leq (n+1)/2$ za vsak $n \geq 0$.

b) Dokaži, da zaporedje a_n ustreza rekurzivni zvezi

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_{n-1-i} + a_{i-2} + 1)$$

za $n \geq 1$.

c) Rekurzivno zvezo iz točke (b) pretvori v diferencialno enačbo z začetnim pogojem $F(0) = 0$ za običajno rodovno funkcijo zaporedja a_n in dokaži, da je

$$F(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{2(1-x)^2}$$

(enolična) rešitev te enačbe.

d) Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$.