

Kombinatorika: 1. kolokvij

23. 11. 2011

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Naj bo S množica desetih dvomestnih števil. Dokaži, da obstajata neprazni disjunktni množici $A, B \subseteq S$, za kateri velja $\sum_{i \in A} i = \sum_{i \in B} i$.

2. naloga (25 točk)

Dokaži

$$\sum_k c(n, k) \binom{k}{l} = c(n+1, l+1).$$

3. naloga (25 točk)(a) Dokaži, da za fiksno $k \geq 0$ velja

$$\sum_{n \geq 0} L(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k.$$

Tu je $L(n, k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}$ Lahovo število.

(b) Pišimo $L(n) = \sum_k L(n, k)$. Poišči eksponentno rodovno funkcijo za $L(n)$. Se pravi, izračunaj

$$\sum_{n \geq 0} L(n) \frac{x^n}{n!}.$$

4. naloga (25 točk)

Poišči (ne da bi naštel vse možnosti) število celoštevilskih rešitev enačbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

pri pogojih $-3 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 3$, $0 \leq x_3 \leq 8$, $1 \leq x_4 \leq 8$.