

Kombinatorika: 2. kolokvij

18. 1. 2012

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Naj bo P končna delno urejena množica z $\widehat{0}$ in $\widehat{1}$. Dokaži, da je

$$\mu(\widehat{0}, \widehat{1}) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots,$$

kjer je c_i število verig dolžine i med $\widehat{0}$ in $\widehat{1}$.

Namig: Kaj je $(\zeta - 1)^i(\widehat{0}, \widehat{1})$?

2. naloga (25 točk)

Poišči rešitev naslednje rekurzivne enačbe:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n - 2 - 2^{n+3}, \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

3. naloga (30 točk)

Naj $a(n, k)$ označuje število permutacij v $\mathfrak{S}_n$ s k fiksnimi točkami.

a) Dokaži, da je za fiksni k

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

b) Izračunaj

$$\sum_{n,k} a(n, k) \frac{x^n}{n!} y^k$$

in rezultat dvakrat parcialno odvajaj po y .

c) S pomočjo prejšnje točke poišči povprečje in varianco števila fiksnih točk permutacij v $\mathfrak{S}_n$.

4. naloga (25 točk)

a) Opiši komponente (enostavnega neusmerjenega) grafa, v katerem imajo vse točke stopnjo 1 ali 2.

b) Naj bo a_n število grafov na $[n]$, v katerih imajo vse točke stopnjo 1 ali 2. Izračunaj eksponentno rodovno funkcijo za a_n .