

Kombinatorika: 2. kolokvij

14. 1. 2016

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Naj a_n označuje število načinov, da n ljudi razvrstimo v neprazne čakalne vrste, potem pa te vrste ciklično uredimo. Tako je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ in $a_3 = 14$.

- (a) Izračunaj a_n preko izreka o kompoziciji.
- (b) Formulo za a_n iz točke (a) dokaži še bijektivno.

2. naloga (25 točk)

Dana je rekurzivna enačba

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = \binom{2n}{n}, \quad a_0 = a_1 = 0.$$

- (a) Izračunaj $F(x)$, običajno rodovno funkcijo za zaporedje $(a_n)_{n \geq 0}$.
Namig: Običajna rodovna funkcija za desno stran zgornje rekurzivne enačbe je $1/\sqrt{1-4x}$.
- (b) Določi asimptotiko a_n . Se pravi, določi A, B, C , za katere velja

$$a_n \sim An^B C^n.$$

3. naloga (25 točk)

- (a) Dokaži, da je najvišja potenca števila 2, ki deli število $n!$, enaka $2^{n-s_2(n)}$, kjer je $s_2(n)$ vsota števk števila n v dvojiškem zapisu.
- (b) Dokaži, da je najvišja potenca števila 2, ki deli Catalanovo število C_n , enaka $2^{s_2(n+1)-1}$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo P lokalno končna delno urejena množica. Definirajmo $\lambda \in I(P, K)$ takole:

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1 & : x = y \text{ ali } x \leq y \\ 0 & : \text{sicer} \end{cases}$$

Opiši pomen naslednjih vrednosti za elementa $x, y \in P$, $x \leq y$:

- (a) $((\lambda - 1) \cdot \zeta)(x, y)$,
- (b) $(\zeta \cdot (\lambda - 1))(x, y)$,
- (c) $(\lambda - 1)^k(x, y)$, kjer je k naravno število,
- (d) $(2 - \lambda)^{-1}(x, y)$.