

Numerična linearna algebra: 1. izpit

22. 6. 2017

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Dokaži, da lahko polinomski problem lastnih vrednosti za polinom $P(\lambda) = \sum_{i=0}^3 \lambda^i A_i$, kjer je $A_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$, prevedemo na reševanje linearnega problema za polinom $\tilde{P}(\lambda) = \lambda \tilde{A}_1 + \tilde{A}_0$, kjer je

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 + A_3 - A_2 & A_3 & A_2 - A_3 \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

2. naloga (20 točk)

Dana sta kompleksni polinom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ in ena izmed njegovih ničel z_0 . Dokaži naslednji trditvi.

a) $|z_0| \leq \max \left\{ 1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right\},$

b) Če so vsi koeficienti polinoma p neničelni in vpeljemo $a_n = 1$, potem je $|z_0| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|a_{i+1}|}.$

Namig: Pomagaj si s spremljevalno matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

ter z ustrezno prehodno matriko, če je to potrebno.

3. naloga (20 točk)

Dani sta gornja Hessenbergova matrika A ter gornja trikotna matrika B , obe velikosti $n \times n$, dodatno pa velja $b_{i,i} = 0$ za neki $1 \leq i \leq n$.

S pomočjo Givensovih rotacij prevedi šop (A, B) na ekvivalenten šop $(\tilde{A}, \tilde{B})$, za katerega velja $\tilde{a}_{n,n-1} = \tilde{b}_{n,n} = 0$. Rešitev lahko skiciraš za primer $n = 5$ in $i = 3$, pri čemer za vse uporabljene rotacije natančno opiši, kako so definirane.

4. naloga (20 točk)

Psevdospekter matrike $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definiramo kot množico števil $z \in \mathbb{C}$, za katero velja ena od naslednjih trditev:

a) $\|(A - zI)^{-1}\|_2 \geq 1/\varepsilon,$

b) $\sigma_n(A - zI) \leq \varepsilon,$

c) obstaja tak $v \in \mathbb{C}^n$, $\|v\|_2 = 1$, da je $\|(A - zI)v\|_2 \leq \varepsilon,$

d) obstaja tak $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\|E\|_2 \leq \varepsilon$, da je z je lastna vrednost matrike $A + E$,

pri čemer je $\varepsilon > 0$ in je $\sigma_n(A - zI)$ najmanjša singularna vrednost matrike $A - zI$. Če slednja ni obrnljiva, definiramo $\|(A - zI)^{-1}\|_2 = \infty$. Dokaži, da so trditve ekvivalentne.