

Numerična linearna algebra: 2. izpit

23. 8. 2018

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Kakšna je zveza med singularnimi vektorji matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$, in singularnimi vektorji matrik AD_1 ter D_2A , kjer sta D_1 in D_2

- a) diagonalni matriki, katerih diagonalni elementi so po absolutni vrednosti enaki 1,
- b) unitarni matriki?

2. naloga (20 točk)

Nelinearni problem lastnih vrednosti podaja funkcija $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$.

- a) Za vse matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ velja, da so njene lastne vrednosti nasprotne vrednosti lastnih vrednosti matrice $-A$. Ali to vedno velja tudi v nelinearnem primeru?
- b) Za vse matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ velja, da so lastne vrednosti matrice A^2 kvadrati lastnih vrednosti matrice A . Ali to vedno velja tudi v nelinearnem primeru?
- c) Naj bo $|\sigma(U)|$ število lastnih vrednosti nelinearnega problema lastnih vrednosti U . Kakšna je zveza med števili $|\sigma(T)|$, $|\sigma(-T)|$ in $|\sigma(T^2)|$?

3. naloga (20 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \sin u \\ 0 & \sin u & 1 \end{bmatrix},$$

kjer je $u \in \mathbb{R}$.

- a) S pomočjo Geršgorinovih izrekov najdi območje, kjer ležijo lastne vrednosti matrice A .
- b) Za najmanjšo izmed njih najdi še boljšo oceno s pomočjo diagonalne prehodne matrice

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & d & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

4. naloga (20 točk)

Dani sta matrici $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in k parov (β_i, b_i) , kjer je $\beta_i \in \mathbb{R}$ ter $b_i \in \mathbb{R}^n$. Ob predpostavki, da je k velik v primerjavi z n , sestavite učinkovit algoritem, ki bo rešil k sistemov $(A + \beta_i B)x = b_i$ v času $\mathcal{O}(kn^2)$.

Namig: redukcija pred začetkom QZ-algoritma.