

Numerične metode 1: 3. izpit

30. 8. 2018

Čas pisanja je 115 minut. Možno je doseči 80 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Dano je zaporedje $\{x_r\}_r$, kjer je $x_0 = 5$ in za $r \geq 0$ velja

$$x_{r+1} = \frac{1}{16}x_r^4 - \frac{1}{2}x_r^3 + 8x_r - 12.$$

- a) Dokaži, da zaporedje konvergira k $\alpha = 4$, in ugotovi red konvergence.
- b) S pomočjo izreka oceni, koliko korakov je potrebnih, da bo približek x_r točen na 8 decimalk. Ocenjeno število korakov primerjaj z dejanskim.

2. naloga (20 točk)

Dano je kompleksno število $z = a + bi$, pri čemer je $b \neq 0$.

- a) Z uporabo zgolj realne aritmetike kar se da stabilno izračunaj enega od njegovih kvadratnih korenov $w = x + yi$ (koren z je tako število w , da je $w^2 = z$).
- b) Pokomentiraj morebitne nestabilnosti v svojem algoritmu.

3. naloga (20 točk)

a) Zapiši razcep Choleskega $P_5 = V_5 V_5^T$ za matriko

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix},$$

pri čemer tako zanjo kot za splošen P_n velja $(P_n)_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1}$.

- b) S pomočjo a) ugani predpis za splošen V_n (pravilnosti ni treba dokazati). Ali lahko V_n izračunamo hitreje kot po standardnem algoritmu? Utemelji.

4. naloga (20 točk)

Dani sta matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in taki ortogonalni matriki Q in Z , da sta matriki QAZ in $Q B Z$ gornjetrikotni. Poleg tega imamo še k števil $\beta_i \in \mathbb{R}$ in k vektorjev $b_i \in \mathbb{R}^n$, ki določajo sisteme $(A + \beta_i B)x = b_i$, $1 \leq i \leq k$.

- a) Zapiši algoritem, ki učinkovito reši vse gornje sisteme enačb.
- b) Preštej število korakov do vodilnega člena natančno.

Število korakov naj bo reda $\mathcal{O}(kn^2)$.