

Numerična linearna algebra: 1. izpit

22. 8. 2019

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Kakšna je zveza med singularnimi vektorji matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$, in singularnimi vektorji matrik AD_1 ter D_2A , kjer sta D_1 in D_2

- a) diagonalni matriki, katerih diagonalni elementi so po absolutni vrednosti enaki 1,
- b) unitarni matriki?

2. naloga (20 točk)

Z $x^*(\alpha, \beta)$ označimo tisti vektor $x \in \mathbb{R}^n$, pri katerem je dosežena minimalna vrednost izraza

$$\|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|_2^2 + \beta^2 \|Dx\|_2^2,$$

kjer sta α in β pozitivni realni števili, $A, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in je D diagonalna matrika.

- a) Zapiši postopek, s katerim izračunaš $x^*(\alpha, \beta)$.
- b) Naj bo $\alpha = 0, 1$. Izračunaj $\lim_{\beta \rightarrow \infty} x^*(\alpha, \beta)$. (Pazljivo obravnavaj vse možnosti.)

3. naloga (20 točk)

Za katere vrednosti parametra x ima matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & x+1 \\ 0 & x+1 & x-3 \end{bmatrix}$$

na intervalu $(2, 4]$ natanko eno lastno vrednost?

4. naloga (20 točk)

Tenzor $T \in \mathbb{R}^{n \times n \times 2}$ ranga m lahko zapišemo kot

$$T = \sum_{i=1}^m u_i \circ v_i \circ \begin{bmatrix} d_i \\ c_i \end{bmatrix}$$

in definiramo $T_1 = T(:, :, 1)$ ter $T_2 = T(:, :, 2)$, pri čemer predpostavimo, da je matrika T_1 polnega ranga. Naj bosta U oz. V matriki, ki ju po stolpcih sestavimo iz vektorjev u_i oz. v_i , matriki D oz. E pa diagonalni, ki imata na diagonalni števila d_i oz. e_i .

- a) Dokaži, da je $T_1 = UDV^T$ in $T_2 = UEV^T$.
- b) Dokaži, da ima posplošeni problem lastnih vrednosti $\det(T_2 - \lambda T_1) = 0$ n realnih rešitev (štetih z njihovo večkratnostjo), če je $m = n$. Katere so te rešitve?