

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [20 točk]

Dan je predoločen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ -5 & -15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

- Izračunajte psevdoinverz matrike A .
- Določite $\mathbf{x}$, ki minimizira $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ in ima izmed vseh rešitev najmanjšo drugo vektorsko normo.

Naloga 2 [20 točk]

Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -0.5 & -2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

s pomočjo prvega in drugega Gerschgorinovega izreka ocenite območja v $\mathbb{C}$, v katerih so vsebovane lastne vrednosti matrike A .

- a) Določite območja za matriko A in za vsako disjunktno množico določite tudi število lastnih vrednosti.
- b) Določite območja za matriko $A^\top$. Iz dobljenega rezultata in rezultata iz točke a) izboljšajte oceno, kje se nahajajo lastne vrednosti matrike A .
- c) Poiščite čim boljšo oceno za največjo lastno vrednost matrike A , tako da uporabite ta dva izreka na matriki XAX^{-1} , kjer je X oblike

$$X = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Naloga 3 [20 točk]

V predpripravi QZ algoritma moramo spraviti matriko A v zgornjo Hessenbergovo obliko, matriko B pa v zgornjo trikotno obliko. Denimo, da imata A in B naslednjo strukturo,

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

S pomočjo množenj z Givensovimi rotacijami z leve in z desne poiščite ortogonalni matriki Q in Z , da imata QAZ in QBZ iskano obliko. Korak za korakom zapišite tudi vmesne matrike. Pravilno označite, kateri elementi so v splošnem neničelni (*) in kateri ničelni (0).

Naloga 4 [20 točk]

Matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ima lastne vrednosti λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima lastne vrednosti μ_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

- a) Pokažite, da so lastne vrednosti matrike $A \otimes B$ enake $\lambda_i \mu_j$, za $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.
- b) Pokažite, da so lastne vrednosti matrike $I_n \otimes A + B^\top \otimes I_m$ enake $\lambda_i + \mu_j$, za $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.
- c) Naj bo $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dana matrika in $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ neznana matrika. Kaj mora veljati za matriki A, B , da bo sistem $AX - XB = C$ imel enolično rešitev? Pomagate si lahko s točko b), četudi je niste uspeli dokazati.